This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

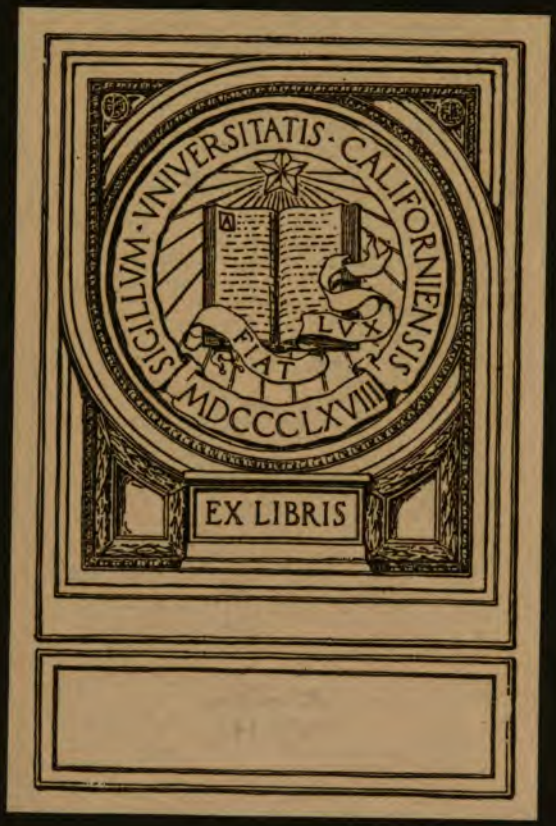
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

QC
481
H8

UC-NRLF
$B 24 475

YE 11186

Digitized by Google



Digitized by Google

AMMLUNG VIEWEG

GESFRAGEN AUS DEN GEBIETEN
DER NATURWISSENSCHAFTEN
UND DER TECHNIK

Heft 18

Die Interferenz der Röntgenstrahlen

Von

Dr. Erich Hupka

EDR. VIEWEG & SOHN BRAUNSCHWEIG

Digitized by Google

Die **„Sammlung Vieweg"** hat sich die Aufgabe gestellt, Wissens- und Forschungsgebiete, Theorien, chemisch-technische Verfahren usw., die im Stadium der Entwicklung stehen, durch zusammenfassende Behandlung unter Beifügung der wichtigsten Literaturangaben weiteren Kreisen bekanntzumachen und ihren **augenblicklichen Entwicklungsstand zu beleuchten.** Sie will dadurch die Orientierung erleichtern und die Richtung zu zeigen suchen, welche die weitere Forschung einzuschlagen hat.

Verzeichnis der bisher erschienenen Hefte siehe 3. und 4. Umschlagseite.

Als Herausgeber der einzelnen Gebiete, auf welche sich die Sammlung Vieweg zunächst erstreckt, sind tätig und zwar für:

Physik (theoretische und praktische, und mathematische Probleme):

Herr Professor **Dr. Karl Scheel,** Physikal.-Techn. Reichsanstalt, Charlottenburg;

Kosmische Physik (Astrophysik, Meteorologie und wissenschaftliche Luftfahrt — Aerologie — Geophysik):

Herr Geh. Ober-Reg.-Rat Professor **Dr. med. et phil. R. Assmann** in Gießen;

Chemie (Allgemeine, Organische und Anorganische Chemie, Physikal. Chemie, Elektrochemie, Technische Chemie, Chemie in ihrer Anwendung auf Künste und Gewerbe, Photochemie, Metallurgie, Bergbau):

Herr Professor **Dr. B. Neumann,** Techn. Hochschule, Breslau;

Technik (Elektro-, Maschinen-, Schiffbautechnik, Flugtechnik, Motoren, Brückenbau):

Herr Professor **Dr.-Ing. h. c. Fritz Emde,** Techn. Hochschule, Stuttgart;

Biologie (Allgemeine Biologie der Tiere und Pflanzen, Biophysik, Biochemie, Immunitätsforschung, Pharmakodynamik, Chemotherapie):

Herr Professor **Dr. phil. et med. Carl Oppenheimer,** Berlin-Grunewald.

Digitized by Google

DIE INTERFERENZ DER RÖNTGENSTRAHLEN

VON

DR. ERICH HUPKA

DOZENT AN DER DEUTSCH.-CHINES. HOCHSCHULE IN TSINGTAU

MIT 33 ABBILDUNGEN UND 1 DOPPELTAFEL IN LICHTDRUCK

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDR. VIEWEG & SOHN

BRAUNSCHWEIG 1914

Digitized by Google

QC471
H9

Alle Rechte vorbehalten.

Copyright, 1914, by Friedr. Vieweg & Sohn,
Braunschweig, Germany.

UNIV. OF
CALIFORNIA

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

I. Die Entstehungsweise und die Eigenschaften der Röntgenstrahlen . 1
1. Die Stokes-Wiechertsche Theorie über die Entstehung der Impulsstrahlung 2
2. Die optischen Analogien der Impulsstrahlung 4
3. Die Wirkungen der Röntgenstrahlen 6

II. Die Beugung der Röntgenstrahlen durch das Molekulargefüge der Materie 8
1. Die Idee Laues und ihre Ausführung 9
2. Die Theorie der Interferenz am Molekulargitter der Kristalle . 11
a) Die Lauesche Form der Theorie 11
b) Die Braggsche Form der Theorie 25
c) Die Vereinigung der Laueschen und der Braggschen Theorie durch Wulff und Terada 32
3. Die „Reflexion" der Röntgenstrahlen und die Interferenz an parallelen Kristallschichten 36
4. Die Molekularstruktur der Kristalle 48
5. Die Beugungserscheinungen an amorphen Körpern 59

III. Die Beugung der γ-Strahlen 63

347393

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIV. OF CALIFORNIA

Einleitung.

Es war im Frühjahr 1912, als Max v. Laue, der uns mit der geistreichen Lösung schon manches schwierigen theoretischen Problems beschenkt hat, die physikalische Mitwelt durch eine experimentelle Entdeckung von allergrößter Tragweite überraschte. Das, was man zunächst davon zu sehen bekam, war freilich nicht sehr viel und bot Raum zu allerlei Vermutungen und Kombinationen: ein paar Karten, die auf die Tische einiger Freunde Laues flatterten; darauf eine merkwürdige symmetrische Punktfigur und darunter die dürre Erklärung, daß dies ein Interferenzbild der Röntgenstrahlen darstelle. „Interferenz!? Aber dann müssen ja geradezu die Moleküle oder Atome die Beugung besorgen", meinte jemand im ersten Augenblick der Verblüffung. Und in der Tat, so war es auch. Wenige Wochen später konnte Laue vor dicht gefülltem Haus der Deutschen Physikalischen Gesellschaft seine Theorie der Beugung von Röntgenstrahlen durch das Molekulargitter der Kristalle auseinandersetzen und die eleganten, von W. Friedrich und P. Knipping im Sommerfeldschen Institut zu München ausgeführten Versuche beschreiben.

I. Die Entstehungsweise und die Eigenschaften der Röntgenstrahlen.

Bevor wir auf den eigentlichen Kern der Laueschen Entdeckung eingehen, seien ein paar orientierende Bemerkungen über die Entstehungsweise der Röntgenstrahlen, ihre Eigenschaften und die Versuche zu ihrer Erklärung vorausgeschickt.

Digitized by Google

1. Die Stokes-Wiechertsche Theorie über die Entstehung der Impulsstrahlung.

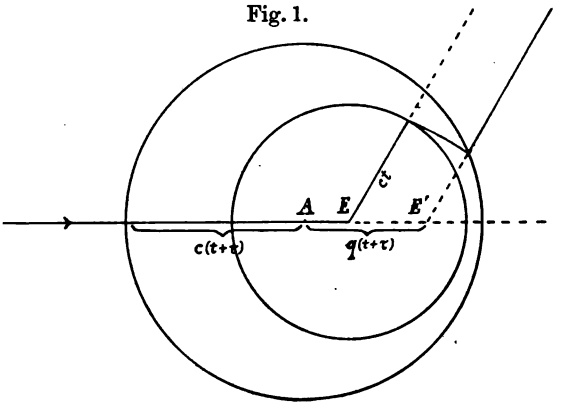
Röntgenstrahlen entstehen bekanntlich beim Auftreffen von Kathodenstrahlen auf ein ihre Bewegung hemmendes Hindernis. Die den Röntgenstrahlen verwandten γ-Strahlen werden beim radioaktiven Zerfall vermutlich durch den Akt der Emission von β-Strahlen erzeugt. Die Kathodenstrahlen und die β-Strahlen sind nichts weiter als Schwärme von Elektronen, die sich beim Fehlen äußerer Kräfte mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig durch den Raum bewegen. Das einzelne Elektron führt dabei ein mit ihm scheinbar starr verbundenes elektromagnetisches Feld mit sich fort. Der elektrische Teil dieses Feldes ist, mäßige, d. h. der Lichtgeschwindigkeit nicht zu nahe kommende Translationen vorausgesetzt, vom Elektron aus betrachtet isotrop: die Kraftlinien verlaufen von der kugelförmig gedachten Oberfläche der Korpuskel in radialer Richtung nach allen Seiten gleichmäßig ins Unendliche; die Feldstärke ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung. Der magnetische Teil des Feldes ist polar in bezug auf eine im Mittelpunkt des Elektrons auf seiner Bewegungsrichtung senkrecht stehende Ebene. Die magnetischen Kraftlinien werden durch Kreise dargestellt, welche die Bahn als Achse umschlingen; die Feldstärke an einem Punkt im Abstand r vom Mittelpunkt des mit der Geschwindigkeit q fortschreitenden Elektrons ist $\frac{\varepsilon . q \sin(q,r)}{r^2}$, wenn ε die elektrische Ladung der Korpuskel bedeutet. Das magnetische Feld besitzt also in Richtung der Bahn $[\sin(q,r) = 0]$ den Wert Null.

Das mitgeführte elektromagnetische Feld repräsentiert einen gewissen Vorrat an Energie, deren Elemente relativ zum Elektron räumlich in ganz bestimmter Weise angeordnet sind. Trifft nun die Korpuskel auf ein Hindernis, so wird ihre Geschwindigkeit geändert, im allgemeinen nach Größe und Richtung; dabei wird die ursprüngliche räumliche Verteilung der Energie gestört. Wir wollen die hemmenden Kräfte so groß annehmen, daß die Bewegung vollkommen abgestoppt wird. Da die Bremsung nicht momentan, sondern in einer gewissen Zeit τ, der Bremszeit, erfolgt, so legt das Elektron noch eine gewisse Wegstrecke σ, den Bremsweg, mit abnehmender Geschwindigkeit zurück. Der Ein-

Digitized by Google

fachheit wegen setzen wir voraus, das Elektron komme ohne Änderung seiner Bahn mit gleichförmig abnehmender Geschwindigkeit zur Ruhe: In Fig. 1 sei A der Anfang der Bremsung, E ihr Ende (der Ruhepunkt des Elektrons); der Pfeil gebe die Bewegungsrichtung an. Dann ist $AE = \sigma$, und τ die Zeit, die das Elektron brauchte, um von A nach E zu gelangen. Seit dem völligen Stillstand bei E ist die Zeit t verstrichen; dann ist seit dem Anfang der Hemmung bei A die Zeit $t + \tau$ vergangen. In dieser Zeit ist daher die bei A entstandene Störung des elektromagnetischen Feldes bis zur Oberfläche einer Kugel vom Radius

Fig. 1.



$c\,(t + \tau)$ um A als Mittelpunkt fortgeschritten, wobei c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Störungen (des Lichtes) im Vakuum ist. Inzwischen aber hat sich das dem ruhenden Elektron zukommende elektrostatische Feld innerhalb einer Kugel vom Radius ct um E ausgebreitet. Dazwischen liegt die „Störungszone". Diesseits dieser Zone herrscht das rein elektrostatische Feld des ruhenden Elektrons; jenseits „wissen" die Kraftlinien noch nichts von der bei A eingetretenen Änderung: sie besitzen noch ihre ursprüngliche Geschwindigkeit. Die elektrischen Kraftlinien, von denen in der Figur eine gezeichnet ist, laufen diesseits auf E zu, jenseits weisen sie nach E' hin, wo das Elektron bei ungestörter Bewegung angelangt wäre, in der Störungszone erleiden sie einen Knick. Dieser Knick pflanzt sich längs der Kraftlinien mit Lichtgeschwindigkeit fort und löscht dabei gleichsam das vor ihm liegende magnetische Feld aus, während hinter ihm ein rein elektrostatisches Feld zurückbleibt.

Digitized by Google

Die dadurch dem Elektron bzw. seinem Feld entzogene elektromagnetische Energie ist nach Stokes und Wiechert das, was wir als Röntgenstrahlung bezeichnen.

2. Die optischen Analogien der Impulsstrahlung.

Eine Reihe von Eigenschaften der Röntgenstrahlen läßt sich mit Hilfe der Theorie voraussagen: Der elektrische und der magnetische Feldvektor steht innerhalb der Störungszone senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung und behält seine Richtung längs des ganzen Strahles bei; d. h. die elektromagnetische Welle ist transversal und geradlinig polarisiert. Da der Bremsvorgang sich in der Natur nicht in der von uns angenommenen einfachen Weise abspielt, so werden wir es in praxi nicht mit einer vollständigen, sondern nur mit einer teilweisen Polarisation zu tun haben. Diese teilweise Polarisation ist von Barkla[1]) und Bassler[2]) experimentell nachgewiesen worden. Die Röntgenstrahlen besitzen also in dieser Beziehung eine gewisse Analogie zum Licht.

Während wir es aber in der Optik mit einer regelmäßigen Reihe von Wellen zu tun haben, in welcher der gleiche elektromagnetische Zustand sich innerhalb einer gewissen Zeit an einer Stelle periodisch viele Male wiederholt, bestehen die Röntgenstrahlen aus einer regellosen Folge von elektromagnetischen Stößen oder Impulsen, die von den zeitlich und räumlich ungeordneten Bremsungen der Kathodenstrahlkorpuskeln erzeugt werden. Wegen dieses Fehlens jeder Periodizität kann man, strenggenommen, auch nicht von einer Wellenlänge, sondern höchstens von einer Impulsbreite der Röntgenstrahlen sprechen. Die Impulsbreite ist, wie sich aus Fig. 1 ergibt, in der Bewegungsrichtung des Elektrons ein Minimum, in der entgegengesetzten ein Maximum. Indessen ist in der Bewegungsrichtung und umgekehrt, wie wir oben gesehen haben, das magnetische Feld gleich Null; es kann also beim Abstoppen der Korpuskel keine elektromagnetische Energie verschwinden, d. h. in diesen Richtungen wird überhaupt keine Strahlung emittiert. Die Abhängigkeit der Impulsbreite vom Emissionswinkel wurde durch Versuche von Friedrich[3]) und Stark[4]) bestätigt.

[1]) C. G. Barkla, Phil. Trans. **204**, 467—479 (1905).
[2]) E. Bassler, Ann. d. Phys. **28**, 808 (1909).
[3]) W. Friedrich, Diss., München 1912.
[4]) J. Stark, Phys. Zeitschr. **11**, 107 (1910).

Digitized by Google

Nach den üblichen Vorstellungen über die Dispersion ist die Brechung an das Vorhandensein gewisser schwingungsfähiger Gebilde (Dipole) in der brechenden Substanz gebunden, die durch die auftreffende Strahlung zu synchronen Schwingungen angeregt werden. Bei der Unregelmäßigkeit und Unabhängigkeit der einzelnen Röntgenimpulse voneinander kann man von einem Synchronismus nicht sprechen und daher keine Brechung erwarten. In der Tat ist nach einer solchen bisher vergeblich gesucht worden. Dieses negative Resultat wird auch durch folgende Überlegungen gerechtfertigt: Auf Grund einer Reihe von Erfahrungen können wir annehmen, daß die gebremste Korpuskel innerhalb eines Atoms oder doch wenigstens innerhalb atomistischer Dimensionen zum Stillstand kommt. Danach wäre der Bremsweg σ von der Größenordnung des Atomabstandes, d. h. in runden Zahlen $\sigma = 10^{-8}$ cm. Nun ist die Bremszeit τ mit der Impulszeit λ verknüpft durch die Beziehung $c\tau = \lambda$, mit dem Bremsweg dagegen, wenn wir wie oben eine geradlinig-gleichförmige Verzögerung voraussetzen, durch die Beziehung $\frac{q\tau}{2} = \sigma$. Daraus folgt $\frac{q\lambda}{2c} = \sigma = 10^{-8}$ cm. Setzen wir $q = 10^{10}$ cm, so wird die obere Grenze $\lambda = 6.10^{-8}$ cm, also etwa 1000mal kleiner als die Wellenlänge für gelbes Licht. Nach der Dispersionstheorie von Planck[1]) ist aber

$$\varkappa + in = \sqrt{\frac{-\frac{6\pi c^3 N}{\nu_0}}{\nu_0^2 - \nu^2 - \frac{2\pi c^3 N}{\nu_0} + \frac{s\nu^3}{\pi\nu_0} i}} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hierin bedeutet ν die Frequenz der auftreffenden Schwingungen, N die Anzahl der Dipole im Volumenelement, ν_0 ihre Frequenz, s ihr logarithmisches Dämpfungsdekrement, $\varkappa$ den Extinktionskoeffizient, n den Brechungsexponent, $i = \sqrt{-1}$. Wir haben gesehen, daß λ für Röntgenstrahlen sehr klein, ν also sehr groß ist. Nehmen wir $\nu = \infty$ an, so wird $\varkappa + in = \sqrt{-1}$, d. h. $\varkappa = 0$, $n = 1$. Die Fortpflanzung erfolgt also ungestört wie im Vakuum, ohne Extinktion und ohne Brechung. Nun ist die Impulsbreite der Röntgenstrahlen zwar sehr gering, aber doch nicht verschwindend klein. Wir können daher auch nur sagen, daß der Brechungs-

[1]) M. Planck, Berl. Ber. 1904, S. 747.

Digitized by Google

exponent von 1 sehr wenig verschieden und die Extinktion sehr klein ist. Hierdurch findet die markanteste Eigentümlichkeit der Röntgenstrahlen, ihr großes Durchdringungsvermögen gegenüber der Materie, ihre Erklärung. Freilich ist zu bedenken, daß die Anwendbarkeit der Dispersionstheorie, strenggenommen, auf den Fall beschränkt ist, wo der Abstand der Dipole klein ist gegen die Wellenlänge, eine Voraussetzung, die nach dem oben Gesagten für Röntgenstrahlen nicht mehr zutrifft. Ein meßbarer Beugungseffekt ist im Hinblick auf die geringe Impulsbreite nur bei Anwendung sehr schmaler Spalte zu erwarten. Versuche in dieser Richtung sind von Haga und Wind[1]), Walter und Pohl[2]) mit Keilspalten angestellt worden. Aus den von Haga und Wind aufgenommenen und von Koch photometrisch ausgewerteten Photogrammen ergibt sich nach einer von Sommerfeld aufgestellten Theorie für Röntgenstrahlen mittlerer Impulsbreite die obere Grenze der Impulsbreite zu $\lambda = 4 . 10^{-9}$ cm.

3. Die Wirkungen der Röntgenstrahlen.

Die Röntgenstrahlen teilen mit kurzwelligem Licht die Fähigkeit, Metalle, auf welche sie auftreffen, zur Emission von Kathodenstrahlen anzuregen. Während man die lichtelektrische Auslösung aber gewöhnlich einer Resonanz zwischen der einfallenden Strahlung und der Eigenfrequenz der im Metallatom gebundenen Elektronen zuschreibt, kommt für die knallartige Impulswelle aus dem oben bei der Betrachtung der Dispersion angeführten Grunde ein solcher Resonanzeffekt kaum in Frage. Man muß wohl eher annehmen, daß das Atom durch den Impuls zertrümmert wird und dabei ein oder mehrere Elektronen verliert. Die Beschleunigung, welche die Korpuskeln bei diesem Vorgang erfahren, bildet die Quelle einer neuen Impulsstrahlung. Da der primäre Impuls die Zeit τ braucht, um über das Atom hinwegzustreichen, so wird das abfliegende Elektron während dieser ganzen Zeit beschleunigt. Nehmen wir nun für diese Beschleunigung die gleiche Gesetzmäßigkeit an wie oben für die Bremsung bei der Entstehung der Primärstrahlung, so wird auch der sekundäre Impuls dieselbe Breite haben wie der primäre. Die Sekundärstrahlung gleicht

[1]) H. Haga und C. H. Wind, Ann. d. Phys. **10**, 305 (1903).
[2]) B. Walter und R. Pohl, Ann. d. Phys. **29**, 331—354 (1909).

Digitized by Google

also, rein äußerlich betrachtet, einer zerstreuten Primärstrahlung. Aus diesem Grunde wurde sie von Barkla mit dem Namen „Zerstreute Strahlung“ bezeichnet. Sie findet sich hauptsächlich bei Metallen von geringem Atomgewicht. Die Abspaltung von Elektronen ist nicht auf die Metalle beschränkt; auch der Primäreffekt bei der Ionisation von Gasen durch Röntgenstrahlen beruht auf einer Zertrümmerung des Atoms. Ja die Ionisation wird geradezu in Ermangelung eines anderen Mittels als Maß für die Intensität der Strahlung benutzt. Vielleicht beruhen auch die chemischen Umsetzungen durch Röntgenstrahlen, insbesondere die photographische Wirkung, auf einer derartigen Abtrennung von Elektronen.

Außer der „zerstreuten Strahlung“ tritt bei Metallen von höherem Atomgewicht noch eine zweite, im Charakter von der Primärstrahlung gänzlich verschiedene Sekundärstrahlung auf. Ihre Entstehungsweise und ihre Eigenschaften wollen wir uns an Hand des folgenden Beispieles veranschaulichen: Führen wir gegen eine an einem Faden hängende Kugel einen kurzen Stoß, so gerät die Kugel, wenn der Stoß nicht etwa so kräftig war, daß der Faden zerreißt, in pendelnde Schwingungen, deren Frequenz lediglich durch die Konstanten des Pendels: Länge, Trägheitsmoment und Größe der Schwerkraft bestimmt ist, also weder von der Stärke, noch von der Dauer des Stoßes abhängt. Mit einer Einschränkung: Die Dauer des Stoßes muß kleiner sein als die Halbschwingungsdauer des Pendels. Denn nehmen wir einmal an, die Dauer des Stoßes sei größer. Dann wird während der ersten Phase die Kugel durch die wirkende Kraft, etwa den Druck unserer Hand, aus ihrer Ruhelage langsam herausbewegt; in der zweiten Phase verschwindet die Kraft, die Hand geht langsam zurück, der Pendelkörper folgt und sinkt wieder in seine Ausgangslage, wo er hängen bleibt, bis ein zweiter Stoß erfolgt. Ein ganz ähnlicher Vorgang spielt sich im Atom ab, wenn ein Röntgenimpuls darüber streicht. Die Pendelkugel ist das einzelne Elektron, dessen Eigenfrequenz durch seine Lage und die Atomkräfte bedingt ist. Sind diese Kräfte für eine bestimmte Korpuskel so schwach, daß diese durch den Impuls aus der Wirkungssphäre des Atoms dauernd entfernt wird (im obigen Beispiel: ist der Faden so dünn, daß er beim Stoß zerreißt), so haben wir den bereits besprochenen Fall der Emission von sekundärer Kathoden- und sekundärer „zerstreuter

Digitized by Google

Strahlung". Sind jedoch die Atomkräfte stark genug, so daß eine Abspaltung nicht möglich ist, dann führt das Elektron periodische Schwingungen aus mit der ihm eigenen Frequenz, die von der Intensität und Breite des Primärimpulses unabhängig ist. Auch hier ist dazu erforderlich, daß die Impulszeit τ kleiner ist als die Halbschwingungsdauer der angestoßenen Schwingung, d. h. die Impulsbreite λ muß kleiner sein als die halbe Wellenlänge der entstehenden monochromatischen Strahlung. Eine ähnliche Beziehung besteht bei der optischen Fluoreszenz zwischen der Wellenlänge des Fluoreszenzlichtes und der erregenden Strahlung. Aus diesem Grunde führt diese Art sekundärer Röntgenstrahlen auch den Namen „Fluoreszenzstrahlung"; wegen ihres monochromatischen, nur durch die Eigenschaften des Atoms bestimmten Charakters wird sie nach Barkla auch als „charakteristische Strahlung" bezeichnet.

Alle im vorstehenden angestellten Überlegungen lassen sich in gleicher Weise auf die γ-Strahlen der radioaktiven Substanzen anwenden. Mit dem Unterschied, daß diese ihre Entstehung nicht der Bremsung, sondern wahrscheinlich der Beschleunigung von Elektronen verdanken, die als β-Strahlen beim radioaktiven Zerfall vom Atom emittiert werden. Entsprechend der größeren Geschwindigkeit der β-Strahlen besitzen die γ-Strahlen eine kleinere Impulsbreite als Röntgenstrahlen und ein größeres Durchdringungsvermögen.

II. Die Beugung der Röntgenstrahlen durch das Molekulargefüge der Materie.

Wir haben oben gesehen, daß eine Beugung der Röntgenstrahlen nur bei Anwendung sehr schmaler Spalte Aussicht auf Erfolg hat, weil die Impulsbreite bzw. Wellenlänge von der Größenordnung des Atomabstandes ist. Es lag daher nahe, das molekulare Maschenwerk der Materie selbst als beugenden Apparat zu benutzen. Theoretisch besonders leicht zu überblicken mußten die Verhältnisse bei einem regelmäßigen Molekulargefüge sein, das etwa nach Art der in der Optik gebräuchlichen Gitter aufgebaut ist. Es war nun der einfache und darum so geniale Gedanke Laues, das Raumgitter der Kristalle für diesen Zweck heranzuziehen.

Digitized by Google

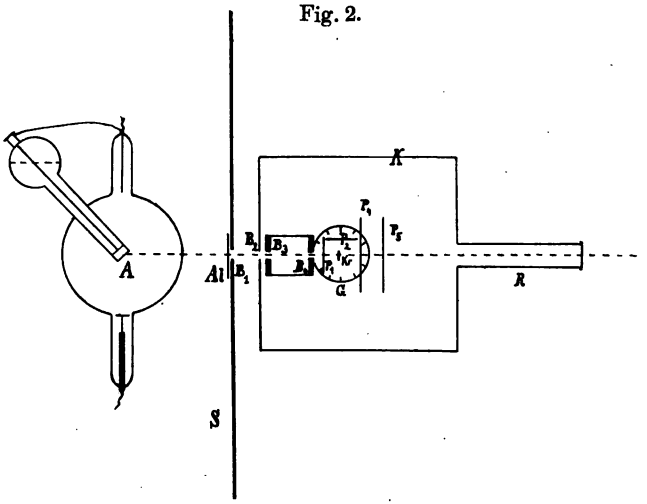
1. Die Idee Laues und ihre Ausführung.

Seit Bravais hat man sich an die Vorstellung gewöhnt, daß die regelmäßige äußere Gestalt der Kristalle eine Folge von der gesetzmäßigen Anordnung ihrer kleinsten Teile (Moleküle und Atome) ist. Diese Gesetzmäßigkeit besteht bekanntlich darin, daß die Moleküle bzw. Atome des Kristalls längs gewisser Richtungen, der kristallographischen Achsen, perlschnurartig gleiche Abstände voneinander haben. Die Überlegungen, von denen Laue ausging, waren nun folgende: Trifft ein in passender Weise ausgeblendetes Bündel Röntgenstrahlen, gleichviel ob Impuls oder monochromatisch, auf einen Kristall, so werden die Elektronen seiner Atome zu Eigenschwingungen angeregt. Diese Schwingungen sind, wenn die Erregung bei allen Teilchen in gleicher Weise stattfindet, kohärent; sie erfolgen mit konstanten, durch die relative Lage der Schwingungszentren bestimmten Phasenunterschieden. In der Umgebung breiten sich daher Strahlen aus, die zu Interferenzen Veranlassung geben. Aus der Verteilung der Interferenzmaxima läßt sich die Wellenlänge der interferierenden Strahlung ermitteln, wenn man die Gitterkonstante, d. h. die Abstände der Schwingungszentren voneinander kennt. Diese lassen sich aber leicht aus den kristallographischen und physikalischen Daten berechnen: Ist nämlich N die Anzahl der Moleküle im Grammolekül (Mol), m das Molekulargewicht und δ die Dichte der durchstrahlten Substanz, so kommen offenbar N Moleküle auf m Gramm, auf δ Gramm, d. h. 1 cm³, also $\frac{N\delta}{m}$ Moleküle. Nehmen wir an, der benutzte Kristall sei regulär und die Moleküle liegen in den Ecken der Elementarwürfel, so kommen auf 1 cm in Richtung der Kanten des Würfels $\sqrt[3]{\frac{N\delta}{m}}$ Moleküle; ihr Abstand ist daher $\sqrt[3]{\frac{m}{N\delta}}$. Die Lauesche Idee wurde von Friedrich und Knipping im Sommerfeldschen Institut zu München praktisch ausgeführt. Die von den Autoren benutzte Versuchsanordnung, deren Skizze in Fig. 2 wiedergegeben ist, war im einzelnen folgende: Die vom Antikathodenbrennfleck A einer Röntgenröhre ausgehenden Röntgenstrahlen wurden durch die Bleischirme $B_1 .. B_4$ bis auf ein Bündel von etwa $^3/_4$ mm Durchmesser abgeblendet, welches den in einem Goniometer G aufgestellten Kristall Kr unter bestimmtem Winkel

Digitized by Google

durchsetzte. Die Justierung erfolgte auf optischem Wege mit Hilfe eines Fernrohres. Rings um den Kristall waren zur Aufnahme der Interferenzfiguren photographische Platten PP angeordnet. Ein Bleikasten K und ein größerer Schirm S schützte die Apparatur vor Nebenstrahlung; das Ansatzrohr R, durch welches die Strahlen austreten konnten, diente zur Kontrolle während der Aufnahmen und zur Vermeidung der Sekundärstrahlung von der inneren Kastenwand. Die Aufnahmen, welche in dieser Weise mit einem regulären Kristall auf einer senkrecht zum Primärstrahl orientierten photographischen Platte erhalten wurden, sind in den Fig. 1 bis 5 (Taf. I) wiedergegeben. Benutzt wurde dabei ein Zink-

Fig. 2.



blendenschliff ($Zn\,S$) von 10×10 mm Fläche und 0,5 mm Dicke. Die Durchstrahlung erfolgte senkrecht zu einer kristallographischen Hauptebene, und zwar Fig. 1 bis 3 senkrecht zu einer Würfelfläche (100), Fig. 4 senkrecht zu einer Oktaederfläche (111), Fig. 5 senkrecht zu einer Rhombendodekaederfläche (110).

Man erkennt in dem zentralen kreisförmigen Fleck auf den Photogrammen leicht den Durchstoßpunkt der Primärstrahlen, aber außerdem in seiner Umgebung eine Anzahl regelmäßig angeordneter, länglicher Punkte. Diese Punktsysteme, welche das Interferenzphänomen der Röntgenstrahlen darstellen, zeigen eine augenfällige Symmetrie: In den Fig. 1 bis 3 lassen sich durch das im Zentralfleck auf der Figurenebene senkrecht stehende Primärbündel

Digitized by Google

vier paarweise zueinander senkrechte Symmetrieebenen legen, was mit Rücksicht auf die obenerwähnte spezielle Orientierung des Kristalles gegen die einfallende Strahlung ohne weiteres verständlich ist. In ähnlicher Weise offenbart sich in Fig. 4 die Dreizähligkeit und in Fig. 5 die Zweizähligkeit des Primärbündels. Absorptionsversuche durch Einschaltung von 3 mm Aluminium (Fig. 3) zeigten, daß die zu Punkten verschiedener „Ringe" gehörigen Strahlen ein verschiedenes Durchdringungsvermögen besaßen, daß sie also aus verschiedenen Wellenlängen oder zum mindesten aus den gleichen in verschiedener Intensitätsverteilung bestanden. Die Impulsbreite der Primärstrahlen, welche wegen der Änderung der Röhrenhärte bei den Expositionen in weiten Grenzen schwankte, blieb ohne Einfluß auf das Resultat. Man muß daraus wohl den Schluß ziehen, daß es sich bei den Punktfiguren um eine von der primären Impulsstrahlung unabhängige Fluoreszenz handelt. Ob diese, aus dem Antikathodenmaterial stammend, bereits im Primärbündel enthalten ist und das Kristallgitter nur eine Aussonderung vornimmt oder ob sie erst von den Elementen des Kristalles emittiert wird, bleibe zunächst dahingestellt. Jedenfalls kann man, wie Laue gezeigt hat, bei einer bestimmten theoretischen Interpretation der Figuren die Wellenlänge der interferierenden Strahlung berechnen.

2. Die Theorie der Interferenz am Molekulargitter der Kristalle.

a) Die Lauesche Form der Theorie.

Der von Laue eingeschlagene Weg ist folgender: Es werde der Betrachtung das allgemeinste Raumgitter zugrunde gelegt, dessen Vertreter das trikline Kristallsystem ist. Die Mittelpunkte benachbarter Atome mögen mit den Ecken kongruenter Parallelepipede zusammenfallen. Der Primärstrahl schließe mit dem orthogonalen, in einem beliebigen Atom ruhenden Achsenkreuz die Richtungskosinus α_0, β_0, γ_0 ein. Seine Wellenform wird im allgemeinen komplizierten Charakter haben, wir können sie jedoch stets, mathematisch wenigstens, durch die Fouriersche Zerlegung in eine Reihe monochromatischer Sinusschwingungen auflösen.

Digitized by Google

Eine solche von der Wellenlänge λ nehmen wir für das Folgende an. Setzen wir die einfallenden Wellen als eben voraus, so herrscht in den Ebenen $x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0 = \varrho + n\lambda$ der gleiche Schwingungszustand (ϱ die Normale vom Koordinatenursprung auf die Wellenebene, n eine ganze Zahl). Wir können daher die sinusförmige Erregung an der Stelle x, y, z proportional setzen $E = e^{-ik(x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0)}$, wo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist. Von dieser Stelle breiten sich die Eigenschwingungen der Atomkorpuskeln in Kugelwellen über den Raum aus. Ihre Amplitude nimmt also umgekehrt mit der Entfernung r vom Punkte x, y, z ab. Mit einer Einschränkung: Die hier betrachteten Wellenlängen sind bereits vergleichbar mit der Größe der Atomdimensionen; infolgedessen spielt voraussichtlich die Anisotropie der Atomkräfte eine nicht zu vernachlässigende Rolle. Wir setzen daher die Erregung der vom schwingenden Atom x, y, z herrührenden Wellen für einen weit entfernten Punkt proportional der Primärerregung E, umgekehrt proportional r und direkt proportional einer Funktion ψ, welche von der Richtung von r abhängt. Da ferner die Phase auf den Kugeln mit $r + n\lambda$ um x, y, z die gleiche ist, so haben wir für die von x, y, z herrührende Erregung im Aufpunkt zu schreiben:

$$E \cdot \psi \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} = \psi \frac{e^{-ik(r + x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0)}}{r}.$$

Summieren wir dies über alle x, y, z, welche Atompunkten entsprechen, so erhalten wir die Superposition der von den verschiedenen Atomen kommenden Elementarwellen:

$$\sum \psi \frac{e^{-ik(r + x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0)}}{r}.$$

Wir wollen nun den Superpositionseffekt für größere Entfernungen vom durchstrahlten Kristall untersuchen, d. h. wir wollen voraussetzen, daß die x, y, z im Vergleich zu den r sehr klein sind. Dann können wir im Nenner statt der verschiedenen, den einzelnen x, y, z zukommenden r die Entfernung R vom Nullpunkt setzen und im Exponenten statt r schreiben $R - \varrho$, wo ϱ der Abstand der durch x, y, z gehenden, auf R senkrechten Ebene

Digitized by Google

vom Nullpunkt ist; ψ wird eine Funktion der Richtung α, β, γ von R. Aus $R - \varrho = R - (x\alpha + y\beta + z\gamma)$ folgt dann

$$\psi(\alpha,\beta,\gamma)\frac{e^{-ikR}}{R}\sum e^{ik[x(\alpha-\alpha_0)+y(\beta-\beta_0)+z(\gamma-\gamma_0)]} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Sind $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ die Kanten des elementären Parallelepipeds, so ist

$$\left.\begin{aligned} x &= m\,\mathfrak{a}_{1x} + n\,\mathfrak{a}_{2x} + p\,\mathfrak{a}_{3x} \\ y &= m\,\mathfrak{a}_{1y} + n\,\mathfrak{a}_{2y} + p\,\mathfrak{a}_{3y} \\ z &= m\,\mathfrak{a}_{1z} + n\,\mathfrak{a}_{2z} + p\,\mathfrak{a}_{3z} \end{aligned}\right\} m, n, p \text{ ganze Zahlen} \quad . \quad . \quad (3)$$

Daraus folgt für (2)

$$\psi(\alpha,\beta,\gamma)\frac{e^{-ikR}}{R}\sum_{m,n,p} e^{i(mA+nB+pC)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} A &= k[\mathfrak{a}_{1x}(\alpha-\alpha_0) + \mathfrak{a}_{1y}(\beta-\beta_0) + \mathfrak{a}_{1z}(\gamma-\gamma_0)] \\ B &= k[\mathfrak{a}_{2x}(\alpha-\alpha_0) + \mathfrak{a}_{2y}(\beta-\beta_0) + \mathfrak{a}_{2z}(\gamma-\gamma_0)] \\ C &= k[\mathfrak{a}_{3x}(\alpha-\alpha_0) + \mathfrak{a}_{3y}(\beta-\beta_0) + \mathfrak{a}_{3z}(\gamma-\gamma_0)] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

ist. Nehmen wir als Begrenzungsflächen des durchstrahlten Kristallstückes Ebenen an, die den Ebenen des Elementarparallelepipeds parallel sind, so ist die Summation von $-M$ bis $+M$, $-N$ bis $+N$, $-P$ bis $+P$ auszuführen, wo M, N, P bestimmte ganze Zahlen sind. Nun ist

$$\sum_{m=-M}^{+M} e^{imA} = 1 + 2\cos A + 2\cos 2A + \cdots + 2\cos MA = \frac{\sin\frac{2M+1}{2}A}{\sin\frac{A}{2}} \quad (6)$$

Demnach wird die Erregung (4) im Aufpunkt

$$\psi(\alpha\beta\gamma)\frac{e^{-ikR}}{R}\,\frac{\sin\frac{2M+1}{2}A\cdot\sin\frac{2N+1}{2}B\cdot\sin\frac{2P+1}{2}C}{\sin\frac{A}{2}\qquad\sin\frac{B}{2}\qquad\sin\frac{C}{2}} \quad (7)$$

und die Intensität

$$\frac{|\psi(\alpha,\beta,\gamma)|^2}{R^2}\,\frac{\sin^2\frac{2M+1}{2}A\cdot\sin^2\frac{2N+1}{2}B\cdot\sin^2\frac{2P+1}{2}C}{\sin^2\frac{A}{2}\qquad\sin^2\frac{B}{2}\qquad\sin^2\frac{C}{2}} \quad (8)$$

Verstärkung durch Interferenz tritt ein, wenn die Intensität ein Maximum wird, d. h. wenn die Sinusquotienten in (8) ein Maximum

Digitized by Google

oder, was dasselbe ist, wenn die Nenner gleich Null werden. Die Bedingungen für das Auftreten von Maximis lauten also:

$$\left.\begin{array}{l} h_1, h_2, h_3 \text{ ganze Zahlen} \begin{cases} A = 2h_1\pi \\ B = 2h_2\pi \text{ oder} \\ C = 2h_3\pi \end{cases} \\ a_{1x}\alpha + a_{1y}\beta + a_{1z}\gamma = h_1\lambda + a_{1x}\alpha_0 + a_{1y}\beta_0 + a_{1z}\gamma_0 \\ a_{2x}\alpha + a_{2y}\beta + a_{2z}\gamma = h_2\lambda + a_{2x}\alpha_0 + a_{2y}\beta_0 + a_{2z}\gamma_0 \\ a_{3x}\alpha + a_{3y}\beta + a_{3z}\gamma = h_3\lambda + a_{3x}\alpha_0 + a_{3y}\beta_0 + a_{3z}\gamma_0 \end{array}\right\} \cdot \quad (9)$$

oder auch

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon \text{ Kosinus der Winkel zwischen} \\ \text{den } a \text{ und } R \\ \vartheta \text{ Kosinus der Winkel zwischen} \\ \text{den } a \text{ und dem einfallenden Strahl} \end{array} \begin{cases} a_1\varepsilon_1 = h_1\lambda + a_1\vartheta_1 \\ a_2\varepsilon_2 = h_2\lambda + a_2\vartheta_2 \\ a_3\varepsilon_3 = h_3\lambda + a_3\vartheta_3 \end{cases}\right\} \cdot \quad (10)$$

Man erhält mithin bei einer bestimmten Richtung des einfallenden Strahles ($\vartheta = const$) eine Schar von Kegeln, deren Achsen die Kanten a sind. Diese Scharen bestehen, da die h sich als ganze Zahlen sprunghaft ändern, aus einer unstetigen Folge von Einzelkegeln. Je zwei von ihnen, welche verschiedenen Scharen angehören, schneiden sich im allgemeinen längs zweier gemeinsamen Erzeugenden; es tritt jedoch selten der Fall ein, daß gleichzeitig ein Kegel der dritten Schar durch eine solche Schnittlinie geht, d. h. es gibt nur sehr wenige Richtungen α, β, γ, für welche die Interferenzbedingung (9) streng erfüllt ist. Man wird indessen auch dann ein Interferenzmaximum erwarten, wenn die Schnittgeraden von drei Kegeln verschiedener Scharen nahe beieinander liegen.

Wir spezialisieren nun die Theorie in Anwendung auf die oben beschriebenen Versuche von Friedrich und Knipping durch die Annahme, daß das Kristallgitter dem regulären Typus angehören soll. Dann werden die a untereinander gleich $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Wir lassen ferner die Koordinatenachsen mit den Kanten des Elementarwürfels zusammenfallen und legen die positive z-Achse in die Richtung des einfallenden Strahles. Dann ist

$$a_{1y} = a_{1z} = a_{2x} = a_{2z} = a_{3x} = a_{3y} = 0;\ a_{1x} = a_{2y} = a_{3z} = a;$$
$$\alpha_0 = \beta_0 = 0:\ \gamma_0 = 1.$$

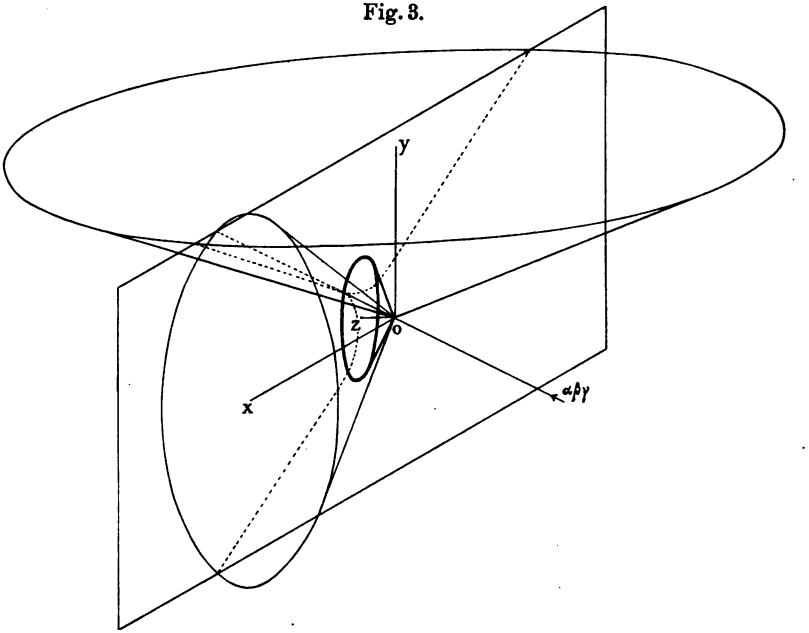
Die Gleichungen (9) erhalten demnach die Form

$$\alpha = h_1\frac{\lambda}{a},\quad \beta = h_2\frac{\lambda}{a},\quad 1-\gamma = h_3\frac{\lambda}{a} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (11)$$

Digitized by Google

Auf einer zum einfallenden Strahl senkrechten Ebene (der photographischen Platte) schneiden diese Kegel Kurven zweiten Grades aus (Fig. 3); und zwar erhält man für $\alpha = const$ und $\beta = const$ Hyperbeln, deren Achsen senkrecht zueinander stehen und deren Mittelpunkt der Durchstoßpunkt des Primärstrahles ist; die Kegel $\gamma = const$ geben Kreise mit dem Durchstoßpunkt als Zentrum. Nur wenn ein solcher Kreis durch den Schnittpunkt zweier Hyperbeln geht oder ihm nahe liegt, erhält man ein Interferenzmaximum. Es werden die Maxima also auf durchbrochenen Kreisen liegen, und

Fig. 3.



dies ist, wie man sich leicht überzeugt, auf den von Friedrich und Knipping aufgenommenen Photogrammen in der Tat der Fall.

Die Radien dieser Kreise sind proportional $tg\,\varphi$, wo φ als Achsenwinkel des Kegels $\gamma = const$ gegeben ist durch $\varphi = arc\ \gamma$. Um die Photogramme theoretisch nachzukonstruieren, nimmt Laue eine Abbildung der Figuren in folgender Weise vor: Er setzt für einen Punkt der Platte α, β selbst als orthogonale Koordinaten statt $\xi = \alpha r$ und $\eta = \beta r$. Die Radien der Kreise $\gamma = const$ sind dann $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{1 - \gamma^2} = sin\,\varphi$, während wir oben $tg\,\varphi$ bekamen. Es tritt also in radialer Richtung eine Verzerrung ein,

Digitized by Google

dagegen bleiben wegen der Beziehung $\alpha:\beta = \xi:\eta$ alle Zentriwinkel und damit die Winkelabstände der Interferenzflecke erhalten; die Kurven $\alpha = const$ und $\beta = const$ werden zu achsenparallelen, äquidistanten Geraden, die man bei Benutzung von λ/a als Längeneinheit direkt auf Koordinatenpapier vorfindet. Jedem Schnittpunkt zweier Geraden entspricht ein Schnittpunkt zweier Hyperbeln. Liegt derselbe einem Kreise $1-\gamma = h_3\,\lambda/a$ sehr nahe, so entspricht ihm ein Interferenzfleck auf dem Photogramm. Nehmen wir für die Rechnung an, daß der Kreis in diesem Fall genau durch den Schnittpunkt der beiden Geraden geht, dann heißt das, die Gleichungen (11) werden genau erfüllt. Es sind also jedem Interferenzfleck drei ganze Zahlen h_1, h_2, h_3 zuzuordnen. Quadriert und summiert man die Gleichungen (11), so erhält man

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1-2\gamma = (h_1^2+h_2^2+h_3^2)\frac{\lambda^2}{a^2}$$

oder
$$2(1-\gamma) = \frac{\lambda^2}{a^2}\Sigma h^2, \text{ d. h.}$$

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{2h_3}{\Sigma h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Aus (11) folgt dann

$$\alpha = \frac{2h_1h_3}{\Sigma h^2};\quad \beta = \frac{2h_2h_3}{\Sigma h^2};\quad \gamma = \frac{h_1^2+h_2^2-h_3^2}{\Sigma h^2} \quad \ldots \quad (13)$$

Die Koordinaten ξ, η auf der Platte werden, wenn ζ ihre Entfernung vom Kristall ist:

$$\xi = \frac{\alpha}{\gamma}\zeta = \frac{2h_1h_3}{h_1^2+h_2^2-h_3^2}\zeta;\quad \eta = \frac{\beta}{\gamma}\zeta = \frac{2h_2h_3}{h_1^2+h_2^2-h_3^2}\zeta \quad (14)$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir imstande, eine theoretische Rekonstruktion zu versuchen. Wir wählen dazu Fig. 1 (Taf. I), für die $\zeta = 3{,}56$ cm war. Der Radius ϱ des zweiten Ringes von innen ergibt sich aus dem Abstand gegenüberliegender Punkte zu $\varrho = 1{,}25$ cm. Mithin wird

$$tg\,\varphi = \frac{\varrho}{\zeta} = 0{,}350;\quad \varphi = 19^0\,20';\quad cos\,\varphi = \gamma = 0{,}9436;$$

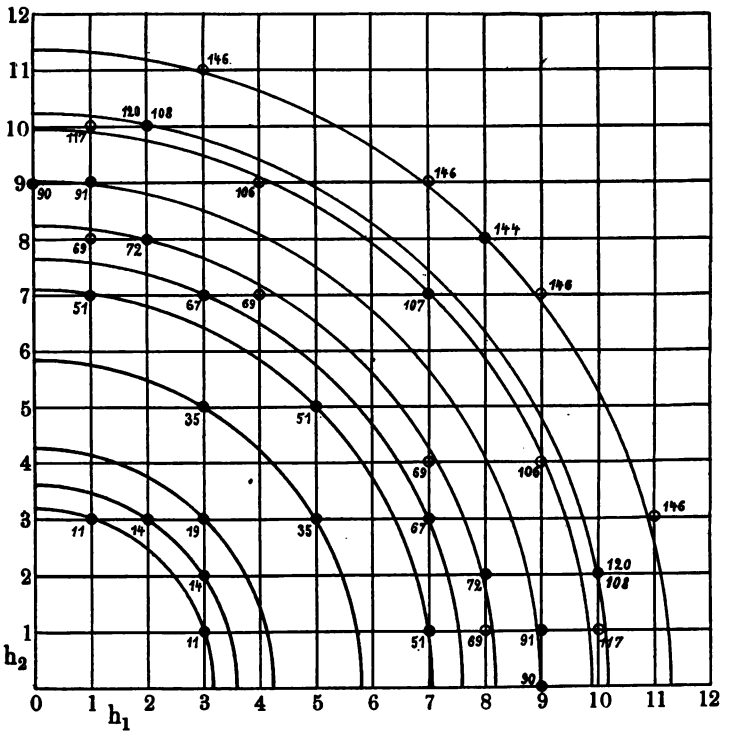
$$1-\gamma = h_3\frac{\lambda}{a} = 0{,}0564.$$

Ist der betrachtete Ring von der ersten Ordnung ($h_3 = 1$), so ist $\frac{\lambda}{a} = 0{,}0564$; folglich nach (12) $\Sigma h^2 = \frac{2}{0{,}0564}$, wegen der Ganz-

Digitized by Google

zahligkeit der h gleich 35. In dem Koordinatensystem (Fig. 4) findet man für die Punkte $h_1 = 3$, $h_2 = 5$ bzw. $h_1 = 5$, $h_2 = 3$, wenn $h_3 = 1$ ist, $\Sigma h^2 = 35$. Die Winkelabstände gegeneinander

Fig. 4.



und gegen die Achsen stimmen mit der Lage des achtfachen Punktes im Photogramm überein. Wir ordnen ihm daher folgendes Schema zu:

h_1	h_2	h_3	Σh^2	$\frac{\lambda}{a}$ nach (12)
3	5	1	35	$\frac{2}{35} = 0{,}0571$

Wäre der Punkt von der zweiten Ordnung ($h_3 = 2$), so wäre nach (11) $1 - \gamma = h_3 \frac{\lambda}{a} = 2\frac{\lambda}{a} = 0{,}0564$; $\frac{\lambda}{a} = 0{,}0282$; nach (12) wäre

Digitized by Google

$\Sigma h^2 = \frac{2h_3}{\lambda/a} = 140$. Aus (13) würde folgen, da die α, β ungeändert bleiben, $h_1 = 6$, $h_2 = 10$, also das Schema:

h_1	h_2	h_3	Σh^2
6	10	2	140

Dem durch diesen Punkt gehenden Kreis liegt nun, wie Fig. 4 zeigt, der Punkt

h_1	h_2	h_3	Σh^2
4	11	2	141

sehr nahe, so daß er ebenfalls auf dem Photogramm auftreten müßte. Da dies nicht der Fall ist, werden wir an der ersten Ordnung ($h_3 = 1$) festhalten. Für einen Ring zweiter Ordnung ($h_3 = 2$) ist nach (12) $\Sigma h^2 = 70$. In Fig. 4 findet sich der achtfache Punkt

h_1	h_2	h_3	Σh^2	$\frac{\lambda}{a}$
2	8	2	72	$\frac{4}{72} = 0{,}0555.$

Für diesen berechnet man

$$1 - \gamma = h_3 \frac{\lambda}{a} = 2 \cdot 0{,}0555 = 0{,}1111; \quad \gamma = 0{,}8889; \quad \varphi = arc\,\gamma = 27^0 16';$$

$$tg\,\varphi = 0{,}5154; \quad \varrho = \xi\, tg\,\varphi = 3{,}56 \cdot 0{,}5154 = 1{,}84 \text{ cm}.$$

In der Tat besitzt auf dem Photogramm ein achtfacher Punkt diesen Abstand ϱ vom Mittelpunkt und den Winkelabstand, der sich aus Fig. 4 bei Vertauschung von h_1 mit h_2 und Vorzeichenwechsel ergibt. Ebenso erhält man auf einem Ring dritter Ordnung vom Radius $\varrho = 2{,}26$ cm den vierfachen Punkt

h_1	h_2	h_3	Σh^2	$\frac{\lambda}{a}$
7	7	2	107	$\frac{6}{107} = 0{,}0561,$

ferner auf einem Ring vierter Ordnung vom Radius $\varrho = 2{,}88$ cm den vierfachen Punkt

h_1	h_2	h_3	Σh^2	$\frac{\lambda}{a}$
8	8	4	144	$\frac{8}{144} = 0{,}0555.$

Digitized by Google

Aus diesen Einzelwerten für $\frac{\lambda}{a}$ folgt im Mittel $\frac{\lambda}{a} = 0{,}0563$. Nun ist für Zinksulfid (ZnS) $m = 65{,}4 + 32 = 97{,}4$; $\delta = 4{,}06$; ferner ist $N = 6{,}17 \cdot 10^{23}$; also

$$a = \sqrt[3]{\frac{m}{N\delta}} = 3{,}38 \cdot 10^{-8} \text{ cm}; \quad \lambda = 1{,}90 \cdot 10^{-9} \text{ cm}.$$

In derselben Weise, wie eben beschrieben, findet man für den innersten Ring ($\varrho = 1{,}01$ cm) den achtfachen Punkt

h_1	h_2	h_3	Σh^2	$\frac{\lambda}{a}$
1	7	1	51	$\frac{2}{51} = 0{,}0392$

und den vierfachen Punkt

h_1	h_2	h_3	Σh^2	$\frac{\lambda}{a}$
5	5	1	51	$\frac{2}{51} = 0{,}0392$,

ferner auf dem Ring ($\varrho = 1{,}46$ cm) den achtfachen Punkt

h_1	h_2	h_3	Σh^2	$\frac{\lambda}{a}$
2	10	2	108	$\frac{4}{108} = 0{,}0370$.

Für diese Gruppe ergibt sich daher die Wellenlänge im Mittel zu $\lambda = 1{,}27 \cdot 10^{-9}$ cm. Hierzu kommen noch andere Gruppen, so daß man im ganzen umstehendes Bild erhält.

Hierbei fällt das Verhältnis der Wellenlängen auf

$$1{,}27 : 1{,}90 : 2{,}24 : 3{,}02 : 3{,}55 : 4{,}83 : 6{,}08 = 8 : 12 : 14 : 19 : 22 : 30 : 38.$$

Man könnte daher versucht sein, als kleinste Wellenlänge $^1/_8 \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-9} = 1{,}6 \cdot 10^{-10}$ cm anzusehen. Indessen ist der Wert von a nicht sicher. Nach Tutton soll man nämlich im Elementarkubus des Zinksulfids nicht je ein Zn und S-Atom annehmen, sondern je 16. Tut man dies, so ist die oben angegebene Länge von a mit $\sqrt[3]{16}$ zu multiplizieren, das gibt $a = 8{,}53 \cdot 10^{-8}$ cm und für λ die Werte

$$3{,}24 \odot 4{,}86 \odot 5{,}66 \odot 7{,}70 \odot 8{,}90 \odot 12{,}14 \odot 15{,}40 \cdot 10^{-9} \text{ cm}.$$

Digitized by Google

h_1	h_2	h_3	Σh^2	$\frac{\lambda}{a}$	ϱ cm	λ mit $a =$ $3{,}38 \cdot 10^{-8}$ cm
3	5	1	35	$\frac{2}{35} = 0{,}0571$	1,25	
2	8	2	72	$\frac{4}{72} = 0{,}0555$	1,84	$1{,}90 \cdot 10^{-9}$
7	7	3	107	$\frac{6}{107} = 0{,}0561$	2,26	
8	8	4	144	$\frac{8}{144} = 0{,}0555$	2,88	
1	7	1	51	$\frac{2}{51} = 0{,}0392$	1,01	
5	5	1	51	$\frac{2}{51} = 0{,}0392$	1,01	$1{,}27 \cdot 10^{-9}$
2	10	2	108	$\frac{4}{108} = 0{,}0370$	1,46	
0	9	3	90	$\frac{6}{90} = 0{,}0667$	2,67	
1	9	3	91	$\frac{6}{91} = 0{,}0659$	2,67	$2{,}24 \cdot 10^{-9}$
2	10	4	120	$\frac{8}{120} = 0{,}0667$	3,31	
3	3	1	19	$\frac{2}{19} = 0{,}1051$	1,78	$3{,}55 \cdot 10^{-9}$
2	3	1	14	$\frac{2}{14} = 0{,}1428$	2,12	$4{,}83 \cdot 10^{-9}$
7	3	3	67	$\frac{6}{67} = 0{,}0895$	3,25	$3{,}02 \cdot 10^{-9}$
3	1	1	11	$\frac{2}{11} = 0{,}182$	2,49	$6{,}08 \cdot 10^{-9}$

Die möglicherweise kleinste Wellenlänge erhöht sich damit auf $^1/_8\, 3{,}24 \cdot 10^{-9} = 4{,}05 \cdot 10^{-10}$ cm.

Es ist auf den ersten Blick überraschend, daß man aus dem sicherlich sehr inhomogenen Primärstrahl eine so wohl definierte endliche Anzahl von Wellenlängen erhält. Daß diese Aussonderung nicht durch die geometrische Gruppierung der Gitterelemente allein besorgt wird, läßt sich leicht beweisen: Es seien ϱ, ω die Polarkoordinaten für die Punkte der photographischen Platte, dann ist $\xi = \varrho \cos\omega$, $\eta = \varrho \sin\omega$. Aus (14) folgt $tg\,\omega = \frac{h_2}{h_1}$,

Digitized by Google

$\varrho = 2\zeta \frac{\sqrt{u}}{|1-u|}$, wenn $u = \frac{h_3^2}{h_1^2 + h_2^2}$ ist. Nun kann man $tg\,\omega$, indem man die Zahlen h_1, h_2 passend wählt, jeden beliebigen Wert geben; ist das Verhältnis $\frac{h_2}{h_1}$ festgelegt, so läßt sich durch Verfügung über h_1, h_3 noch u und damit ϱ beliebig bestimmen. Man erhält also zu jedem Wertepaar ϱ, ω ein mögliches Interferenzmaximum, d. h. die photographische Platte müßte vollständig geschwärzt sein. Daß dies in der Tat nicht der Fall ist, liegt an dem aussondernden Charakter der Richtungsfunktion ψ, welche der Anisotropie der Gitterelemente Rechnung trägt. In der Optik ist übrigens ein ähnlicher Einfluß der Form der Gitterfurchen bekannt: zwei Gitter von gleicher Gitterkonstante, aber verschiedener Gestalt ihrer Furchen, geben ganz verschiedene Intensitätsverteilungen in den einzelnen Spektren (manche Spektren oder Wellenlängen können unter Umständen völlig ausfallen).

Neben der Anisotropie des einzelnen Gitterelementes kommt für die Interferenzwirkung noch ein verschiedener Einfluß der Gruppierungsrichtungen dieser Elemente in Betracht. Wegen der Kleinheit der Wellenlängen dürfen wir nämlich die Krümmung der einfallenden Wellen nicht mehr vernachlässigen und dieselben, wie wir es bisher getan haben, als eben voraussetzen. Statt $e^{-ik(x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0)}$ müssen wir vielmehr für die Primärerregung einen Ausdruck von der Form $\frac{e^{-ikr'}}{r'}$ anwenden, wo r' der Abstand des Kristallatoms von der punktförmig gedachten Strahlungsquelle (Antikathodenbrennfleck) ist. Ohne diesen Ansatz weiter zu verfolgen, können wir doch soviel sagen: Die Punkte gleicher Phase auf der z-Achse ändern durch die neue Annahme ihre Lage nicht. Infolgedessen wird der Interferenzeffekt, welcher von den in der Strahlrichtung (parallel zur z-Achse) liegenden Gitterelementen herrührt, durch die Krümmung der Wellenfront nicht alteriert, d. h. die Kegel $\gamma = const$ bleiben mathematisch scharf und gehen durch dieselben Punkte wie im Falle ebener Wellen. Freilich gilt das, strenggenommen, nur für die z-Achse selbst und nicht für die ihr parallelen Atomreihen; indessen ist der Einfluß der „schiefen“ Erregung durch die Kugelwellen bedeutungslos, wenn man sich nicht zu weit von der Achse entfernt. Dagegen ist der Einfluß der Krümmung auf die Wirkung der in einer x, y-Ebene

Digitized by Google

angeordneten Atome erheblich. Als wir früher ebene Primärwellen angenommen hatten, wurden wird auf das aus der Optik bekannte Kreuzgitterspektrum geführt; dieses besteht bei monochromatischer Strahlung aus scharfen Punkten, die mit den Schnittpunkten zweier zueinander senkrecht stehenden Hyperbelscharen zusammenfallen. In der Optik erhalten wir, wenn wir die Strahlungsquelle dem Gitter nähern, statt der Punkte breite, verwaschene Flecke. Dasselbe werden wir auch bei den Röntgenstrahlen zu erwarten haben, wenn die Krümmung der Wellenfront merklich wird. Die Gesamtwirkung der Gitterelemente in der Strahlrichtung und senkrecht dazu ist daher folgende: Die scharfen Kreise $\gamma = const$ sondern aus den breiten, verwaschenen Schnittpunkten der Hyperbeln längliche, zu den Kreisen tangentielle Flecke aus. Und das bestätigen in der Tat die Photogramme. Bei größeren Abständen des Kristalls von der Antikathode (schwächer gekrümmten Wellen) erhält man in Übereinstimmung mit der Theorie schärfere Punkte.

Während hiernach die Lauesche Theorie durch die Erfahrung weitgehend bestätigt wird, bleibt andererseits eine Reihe von Schwierigkeiten übrig, die zweifelsfrei zu beheben bisher nicht gelungen ist. Zunächst fehlt in den Photogrammen eine ganze Anzahl von Punkten, die nach der oben mitgeteilten rechnerischen Konstruktion eigentlich vorhanden sein sollten; so z. B. um nur zwei im Photogramm 1 (Taf. I) zu nennen, die Punkte

h_1	h_2	h_3	Σh^2
1	8	2	69
4	9	3	106

Laue hilft sich mit folgender Deutung: Wie bereits gelegentlich der Wellenlängenbestimmung erwähnt wurde, hat man nach neueren kristallographischen Vorstellungen ein Elementarparallelepiped unter Umständen mit mehreren Atomen zu besetzen. Die Kristallstruktur wird nämlich oft nicht durch ein einfaches Raumgitter, sondern durch mehrere einander kongruente und parallele (ineinander geschachtelte) einfache Gitter dargestellt. Unter dieser Voraussetzung haben wir außer den durch Gleichung (3) bestimmten Atomen noch eine Reihe weiterer, deren Lage durch Relationen von der Form

$$\left.\begin{aligned} x' &= (m+\delta')\,a_{1x} + (n+\varepsilon')\,a_{2x} + (p+\zeta')\,a_{3x} \\ y' &= (m+\delta')\,a_{1y} + (n+\varepsilon')\,a_{2y} + (p+\zeta')\,a_{3y} \\ z' &= (m+\delta')\,a_{1z} + (n+\varepsilon')\,a_{2z} + (p+\zeta')\,a_{3z} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (15)$$

Digitized by Google

gegeben ist; die δ, ε, ζ sind für die einzelnen einfachen Raumgitter charakteristische echte Brüche. Da die Kräfte zwischen den einzelnen, verschiedenen Raumgittern angehörenden Atomen wegen ihrer verschiedenen relativen Lage nicht untereinander gleich sind, so erhalten wir für (2) eine Anzahl Teilsummen mit verschiedenen Funktionen ψ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{e^{-ikR}}{R}\Big[&\psi\,\Sigma\, e^{ik[x(\alpha-\alpha_0)+y(\beta-\beta_0)+z(\gamma-\gamma_0)]}\\ &+\psi'\,\Sigma\, e^{ik[x'(\alpha-\alpha_0)+y'(\beta-\beta_0)+z'(\gamma-\gamma_0)]}+\cdots\Big]\\ &=\frac{e^{-ikR}}{R}(\psi+\psi' e^{iR'}+\psi'' e^{iR''}+\cdots)\,\Sigma\, e^{i(mA+nB+pC)}\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

wo

$$\left.\begin{aligned}R' &= k[(x'-x)(\alpha-\alpha_0)+(y'-y)(\beta-\beta_0)+(z'-z)(\gamma-\gamma_0)]\\ R'' &= k[(x''-x)(\alpha-\alpha_0)+(y''-y)(\beta-\beta_0)+(z''-z)(\gamma-\gamma_0)]\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

ist. Man sieht leicht, daß sich die neue Form (16) von der alten (4) nur durch den Klammerausdruck der ψ unterscheidet. Nach Laue soll nun das Fehlen eines Punktes im Photogramm, der entsprechend dem Wert der Summe Σ in (16) auftreten müßte, auf das Verschwinden der Klammer zurückzuführen sein.

Eine Schwierigkeit in der Auffassung des Kristalls als Diffraktionsgitter entspringt aus unseren Vorstellungen über die kinetischen Ursachen der Körperwärme. Wir haben uns daran gewöhnt, die Wärme als eine Folge der ungeordneten Bewegungen der Moleküle anzusehen. Bei dieser Regellosigkeit sollte, in Anbetracht der kleinen Wellenlänge der Röntgenstrahlen, von einer Gesetzmäßigkeit im Kristallgefüge kaum noch die Rede sein. Man kann indessen, worauf Planck hingewiesen hat, diesem Einwand vielleicht durch die Annahme begegnen, daß gewisse kleine zusammenhängende Bereiche synchron mit gleicher Amplitude und Phase schwingen. Laue hat nun in geschickter Weise die Größenordnung der lateralen Ausdehnung der bei der Interferenz mitwirkenden Kristallpartie abgeschätzt. Man kann nämlich theoretisch die Entfernung Antikathode-Kristall berechnen, für welche bei einer bestimmten Seitenausdehnung der durchstrahlten Zone der Einfluß der Wellenkrümmung unterhalb einer durch die Meßgenauigkeit gegebenen Grenze bleibt; umgekehrt ist es möglich, wenn diese Entfernung experimentell bekannt ist, die Breite des zur Interferenz beitragenden Gitters zu bestimmen. So hat Laue die

Digitized by Google

Breite des Gitters für Flußspat zu etwa $6 \cdot 10^{-4}$ cm berechnet, während die Ausdehnung des durchstrahlten Stückes einige Hundertstel betrug. Es ist also in der Tat nur ein kleiner Teil der durchstrahlten Partie bei der Interferenz wirksam. Man sollte nun annehmen, daß mit abnehmender Temperatur der zusammenhängende Bereich infolge der Abnahme der Wärmebewegung an Ausdehnung zunimmt, d. h. bei tiefen Temperaturen sollte der Einfluß der Wellenkrümmung noch für größere Entfernungen Antikathode—Kristall vorhanden sein, für die er bei gewöhnlicher Temperatur nicht mehr nachweisbar ist. De Broglie, der Kristalle während der Durchstrahlung bis zum Siedepunkt des Sauerstoffes abgekühlt hat, weiß jedoch über einen Effekt dieser Art nichts zu berichten. Eine eingehende Theorie über den Einfluß der Wärmebewegung auf die Beugung der Röntgenstrahlen ist von Debije[1]) ausgearbeitet worden. Es würde indessen zu weit führen, auf dieselbe hier näher einzugehen.

Die größte, noch nicht einmal versuchsweise gelöste Schwierigkeit der Laueschen Theorie ist folgende. Verschiedene Kristalle desselben Kristallsystems, aber verschiedener chemischer Zusammensetzung geben bei gleicher Orientierung des einfallenden Strahles und der photographischen Platte dieselben Diagramme, also auch dieselben Zahlen h und dieselben Richtungen α, β, γ. Da die Gitterkonstante a bei verschiedenen Kristallen verschieden ist, so können α, β, γ beim Übergang von einer Substanz zu einer anderen nur dann dieselben Werte behalten, wenn λ/a für korrespondierende Punkte konstant ist, d. h. wenn λ sich proportional a ändert. Nun zeigen entsprechende Flecken in den Photogrammen verschiedener Kristalle Unterschiede in der relativen Intensität; man kann diese Unterschiede auf die Verschiedenheit der Wellenlänge in der interferierenden Strahlung schieben. Es erhebt sich aber dann die Frage, warum eine Wellenlänge λ, die sich aus dem Diagramm des Kristalles I ergibt, nicht auch im Diagramm des Kristalles II vertreten ist. Die Aussonderung der tatsächlich vorhandenen Wellenlängen können wir auf das Konto der Funktion ψ setzen, ähnlich wie wir es früher getan haben, um eine allgemeine Schwärzung der photographischen Platte auszuschließen. Durch

[1]) P. Debije, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 678—689, 738—752, 857—875 (1913).

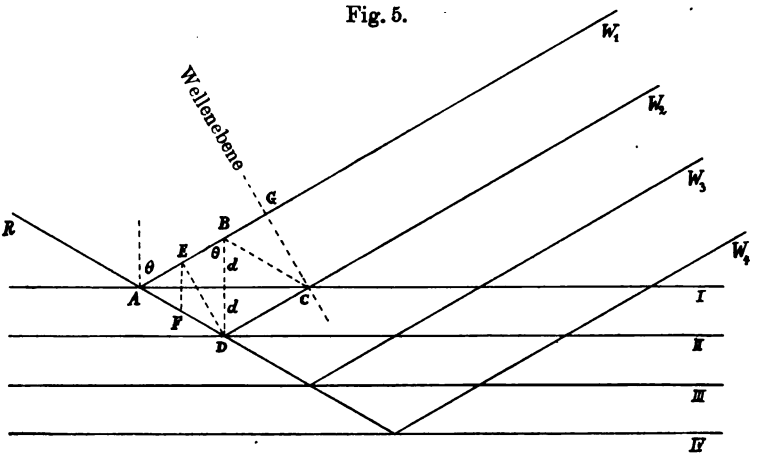
Digitized by Google

diese Funktion würden dann diejenigen Wellenlängen ausgewählt, welche zum Atomabstand in ganz bestimmten (für das Kristallsystem konstanten) Verhältnissen stehen; der Atomabstand müßte daher für die Werte, welche ψ annehmen kann, eine ausgezeichnete Rolle spielen. Und das ist mit dem Charakter der Funktion durchaus verträglich; denn ψ spiegelt die Atomeigenschaften wieder, und der Atomabstand ist offenbar eine Folge derselben.

b) Die Braggsche Form der Theorie.

Eine in manchen Punkten von der Laueschen abweichende Form der Darstellung hat W. L. Bragg[1]) gewählt. Nach ihm werden die auf den Kristall auftreffenden Impulse von den hintereinander liegenden parallelen Atomschichten reflektiert. Der konstante

Fig. 5.



Abstand dieser Schichten bedingt, daß die reflektierten Impulse in ganz bestimmten, konstanten Distanzen aufeinander folgen. Dadurch entsteht eine Periodizität im reflektierten Strahl: „der Kristall schafft", wie Bragg sich ausdrückt, „eine monochromatische Strahlung". In jedem Kristall gibt es nun eine ganze Reihe von Systemen paralleler Atomschichten. Jedem solchen System soll ein Fleck im Photogramm entsprechen. Wir wollen eines davon herausgreifen. In Fig. 5 seien I, II, III, IV,... die

[1]) W. L. Bragg, Nature **90**, 410 (1912); Proc. Cambr. Phil. Soc. **17**, 43—57 (1913).

Digitized by Google

senkrechten Schnitte der einzelnen Schichten, ihr Abstand sei d. Ein ebener Impuls $W_1, W_2, W_3, W_4, \ldots$ falle unter dem Einfallswinkel θ auf. Dann beträgt der Gangunterschied der in der Richtung R fortschreitenden, aus W_1 bzw. W_2 stammenden Stöße

$$(AD + DC) - AG = AD - AE = AB - AE$$
$$= EB = 2\,d\cos\theta.$$

Die Wellenlänge der reflektierten Strahlung ist also gegeben durch die Beziehung $\lambda = 2\,d\cos\theta$.

Zur theoretischen Rekonstruktion des von Friedrich und Knipping aufgenommenen Photogramms (Fig. 1, Taf. I) bedient sich Bragg folgenden Verfahrens. Im Gegensatz zu Laue, der nur die acht Ecken des Elementarwürfels mit Atomen besetzt, legt er nach der Theorie von Barlow und Pope das Atomgitter engster Packung zugrunde, welches kubische Symmetrie aufweist; demgemäß hat man außer in den acht Ecken noch in der Mitte jeder Fläche des Elementarwürfels ein Atom anzunehmen:

Für die folgende Darstellung benutzen wir ein orthogonales, in einem Atom ruhendes Koordinatensystem, dessen Achsen den Würfelkanten parallel sind. Jedes System der Reflexionsebenen besitzt dann einen Vertreter, der durch den Nullpunkt geht; mithin wird die allgemeine Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ der Ebene spezialisiert $Ax + By + Cz = 0$. Diese Ebene schneidet die xz-Ebene und die yz-Ebene in je einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden; jede dieser Geraden läuft durch eine Reihe äquidistanter Atome. Die beiden dem Nullpunkt zunächst liegenden Atome mögen die Koordinaten x_y, z_y bzw. y_x, z_x haben. Für diese beiden Atome geht die Gleichung der Nullpunktsebene über in die Form $Ax_y + Cz_y = 0$ und $By_x + Cz_x = 0$. Durch Auflösen nach B und C erhält man schließlich

$$z_y y_x . x + x_y z_x . y - y_x x_y . z = 0.$$

Man kann also durch die vier Größen x_y, z_y, y_x, z_x die Lage jedes Systems von Schichten bestimmen. Der kleinste Wert dieser Koordinaten ist (vgl. Fig. 6), wenn die Würfelkante gleich a gesetzt wird, offenbar gleich $a/2$; allgemein also

$$x_y = p\,.\,a/2;\; z_y = q\,.\,a/2;\quad y_x = r\,.\,a/2;\quad z_x = s\,.\,a/2;$$

Digitized by Google

wo p, q, r, s ganze Zahlen sind. Die Richtungskosinus der Normalen der Nullpunktsebene sind daher

$$\cos\alpha = l = \frac{rq}{\sqrt{p^2s^2+q^2r^2+p^2r^2}};\ \cos\beta = m = \frac{ps}{\sqrt{p^2s^2+q^2r^2+p^2r^2}};$$

$$\cos\gamma = n = \frac{-pr}{\sqrt{p^2s^2+q^2r^2+p^2r^2}}.$$

Diese Normale $\alpha\beta\gamma$ ist das Einfallslot des in Richtung der z-Achse einfallenden Primärstrahls. In Fig. 7 ist der Oktant der um den Nullpunkt beschriebenen Einheitskugel dargestellt, der

Fig. 6.

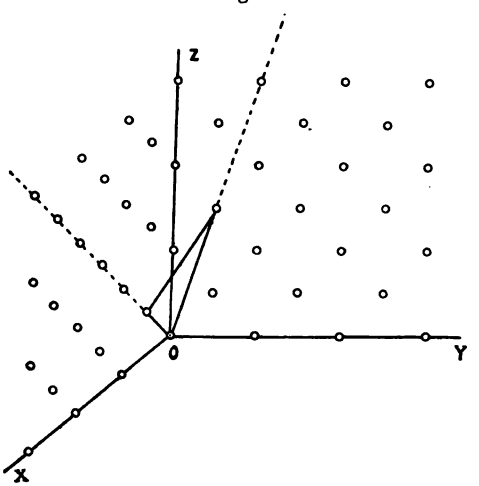
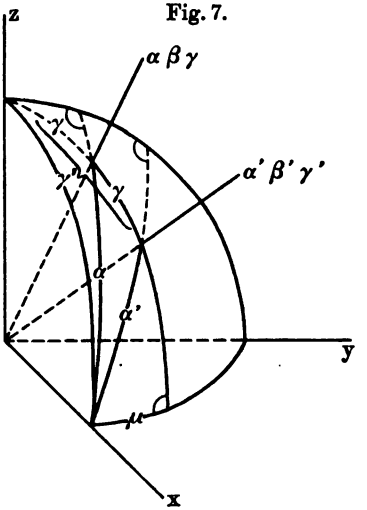


Fig. 7.



vom Einfallslot $\alpha\beta\gamma$ durchstochen wird. Die Richtung des reflektierten Strahles $\alpha'\beta'\gamma'$ läßt sich dann leicht ermitteln: Da γ der Einfallswinkel ist, so ist der Reflexionswinkel $\gamma' = 2\gamma$, d. h. $\cos\gamma' = 2\cos^2\gamma - 1 = 2n^2 - 1$. Ferner ist nach bekannten Sätzen der sphärischen Trigonometrie:

$$\begin{array}{l|l} \cos\alpha = \sin\gamma\ \cos\mu & \dfrac{\cos\alpha'}{\cos\alpha} = \dfrac{\sin 2\gamma}{\sin\gamma} = 2\cos\gamma; \\ \cos\alpha' = \sin 2\gamma\cos\mu & \end{array}$$

$$\cos\alpha' = 2\cos\alpha\cos\gamma = 2ln;$$

analog ergibt sich $\cos\beta' = 2mn$. Da andererseits der Einfallswinkel $\theta = \gamma$ ist, so folgt $\lambda = 2dn$. Wenn man statt des Abstandes d der einzelnen Schichten voneinander ihre Abschnitte auf der z-Achse einführt: $\delta = \dfrac{d}{\cos\theta}$, so wird $\lambda = 2\delta n^2$. Hierin

Digitized by Google

p	q	r	s	$\frac{a}{2} : \lambda$	δ	λ	Intensität	h_1	h_2	h_3
1	1	1	3	2,8			3	1	3	1
1	1	1	5	6,8			5	1	5	1
1	1	1	7	12,8			3	1	7	1
1	1	1	9	20,8			—	1	9	1
1	3	1	1	2,8			3	3	1	1
1	3	1	3	4,8			3	3	3	1
1	3	1	5	8,8			5	3	5	1
1	3	1	7	14,8			2	3	7	1
1	3	1	9	22,8	a	$2an^2$	—	3	9	1
1	5	1	1	6,8			5	5	1	1
1	5	1	3	8,8			5	5	3	1
1	5	1	5	12,8			3	5	5	1
1	5	1	7	18,8			—	5	7	1
1	7	1	1	12,8			3	7	1	1
1	7	1	3	14,8			2	7	3	1
1	7	1	5	18,8			—	7	5	1
1	9	1	1	20,8			—	9	1	1
1	1	2	4	3			1	2	4	2
1	1	2	8	9			4	2	8	2
1	1	2	12	19			—	2	12	2
2	4	2	0	2,5			—	4	0	2
2	4	2	4	4,5			1	4	4	2
2	4	2	8	10,5	$\frac{a}{2}$	an^2	1	4	8	2
1	3	2	0	5			3	6	0	2
1	3	2	4	7			4	6	4	2
1	3	2	8	13			1	6	8	2
2	8	2	0	8,5			1	8	0	2
2	8	2	4	10,5			1	8	4	2
1	5	2	0	13			—	10	0	2
1	1	3	5	3,6			—	3	5	3
1	1	3	7	5,6			1	3	7	3
1	1	3	11	11,6			—	3	11	3
3	5	3	5	4,9			—	5	5	3
3	5	3	7	6,9			3	5	7	3
3	5	3	11	12,9			—	5	11	3
3	7	3	1	4,9	$\frac{a}{3}$	$\frac{2an^2}{3}$	—	7	1	3
3	7	3	5	6,9			3	7	5	3
3	7	3	7	8,9			3	7	7	3
3	7	3	11	14,9			—	7	11	3
1	3	3	1	7,6			3	9	1	3
1	3	3	5	9,6			2	9	5	3
1	3	3	7	11,6			—	9	7	3
1	1	4	10	8,2			—	4	10	4
1	1	4	14	16,2	$\frac{a}{4}$	$\frac{an^2}{2}$	—	4	14	4
2	4	4	10	11,2			2	8	10	4
1	3	4	6	12,2			—	12	6	4

Digitized by Google

läßt sich n durch die Bestimmungsstücke p, q, r, s des Ebenensystems ausdrücken; um auch δ zu diesen Größen in Beziehung zu bringen, fassen wir sämtliche Atome in Alleen zusammen, welche parallel der z-Achse verlaufen (vgl. Fig. 6). Dann schneidet z. B. jede Nullpunktsebene, für die $p = 1$, $r = 1$, q und s beliebig sind, aus jeder solchen Allee ein Atom heraus. Die hierzu parallele, nächstfolgende Ebene schneidet die z-Achse in der Entfernung a vom Nullpunkt, die nächste in der Entfernung $2a$ usw. Es ist also für sämtliche Schichtsysteme, welche durch $p = 1$, $r = 1$ charakterisiert sind, $\delta = a$, also $\lambda = 2an^2$. Da offenbar jede mögliche Ebene (die der z-Achse nicht parallel ist) aus jeder Allee höchstens je ein Atom herausschneiden kann, so ist die Atomdichte in diesen Schichten die größtmögliche; die Atomdichte wird dabei auf die Querschnittseinheit des einfallenden Strahlenbündels bezogen; sie ist, wenn man die Atome auf die xy-Ebene projiziert, gleich der Dichte der Projektionspunkte, bezogen auf die Flächeneinheit. Ist $p = 1$, $r = 2$, so schneidet jede Schicht nur aus der Hälfte der Alleen ein Atom aus. Die Atomdichte ist nur halb so groß wie früher; da die Volumendichte dieselbe geblieben ist, so muß in diesem Falle $\delta = \frac{a}{2}$ werden. Wenn $p = 1$, $r = 3$ ist, so wird $\delta = \frac{a}{3}$ usw. Allgemein erhält man

$$\delta = \frac{a}{\text{kleinste Multiplum von } p \text{ und } r}.$$

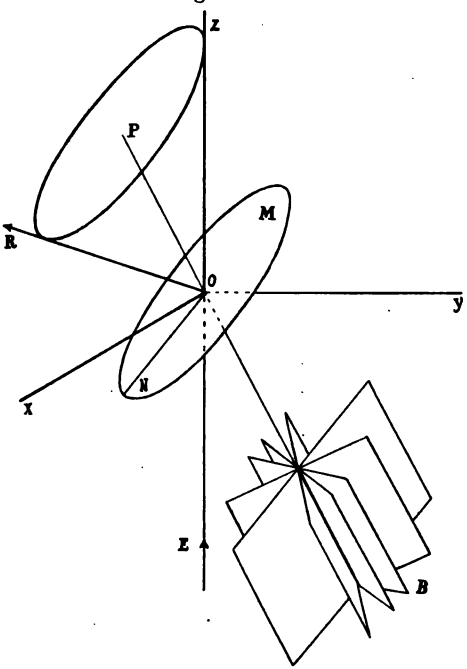
Die nebenstehende Tabelle bringt eine Zusammenstellung aller Ebenensysteme bis $r = 4$, welche zu Punkten auf dem Photogramm Veranlassung geben können. Die Intensität der Flecke ist in einer willkürlichen Skala durch die Zahlen 5, 4, 3, 2, 1 unterschieden. Man sieht, daß die Punkte, für welche $\frac{a}{2} : \lambda$ zwischen 6 und 9 liegt, die größte Schwärzung zeigen.

Wählt man eine beliebige Nullpunktsebene aus, die durch einen bestimmten Atompunkt P der xz-Ebene geht (vgl. Fig. 8), und läßt man sie um OP als Achse rotieren, so erhält man ein Ebenenbüschel B. Die Normalen der einzelnen Elemente dieses Büschels liegen in einer zu OP senkrechten Ebene M. Ein Strahl E, der in Richtung der z-Achse einfällt, möge an jeder Ebene des Büschels reflektiert werden. Der einfallende und die reflektierten

Digitized by Google

Strahlen, von denen einer in der Richtung R gezeichnet ist, schließen dann mit den verschiedenen Normalen ON gleiche Winkel ein, d. h. die reflektierten Strahlen bilden die Erzeugenden eines auf M senkrechten Kreiskegels; dieser Kegel hat OP zur Achse; die z-Achse selbst gehört ebenfalls zu den Erzeugenden (Richtung des reflektierten Strahles für den Einfallswinkel $\pi/2$). Denken wir uns, wie früher, die photographische Platte senkrecht zur z-Achse orientiert, so schneidet der Kegel aus der Platte eine Ellipse aus, welche die y-Achse im Nullpunkt (Durchstoßpunkt des direkten Strahles) berührt. In ähnlicher Weise erhält man für Atompunkte P', die in der yz-Ebene liegen, Ellipsen, welche die x-Achse im Nullpunkt berühren. Die Schnittpunkte beider Systeme von Ellipsen geben die Richtung der Strahlen an, welche von Ebenen reflektiert werden, die durch alle drei Punkte (O, P, P') gehen, d. h. es sind die Punkte des Photogramms (vgl. Fig. 9). Wir haben bei dieser Ableitung keine Voraussetzung über die Orientierung des Kristallgitters zu den Koordinatenachsen gemacht. Mithin gelten die Folgerungen in gleicher Weise auch für eine gegen den einfallenden Strahl geneigte Lage des Kristalls. Da $\lambda = 2\,d\cos\theta$ war, so tritt bei der Neigung des Kristalls (anderes θ) eine Änderung der Wellenlänge und damit eine Änderung in der Schwärzung ein; auch hier sind wie oben die Flecke die intensivsten, bei denen $a/2 : \lambda$ zwischen 6 und 9 liegt.

Fig. 8.

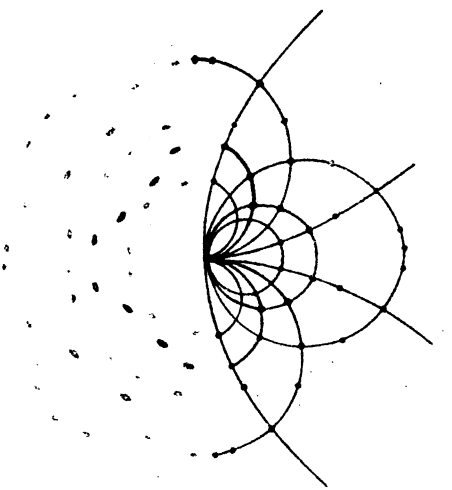


Die hier mitgeteilte Theorie unterscheidet sich, wenn man von der Struktur des zugrunde gelegten Kristallgitters absieht,

Digitized by Google

nur formal von der Laueschen, worauf schon Bragg selbst hingewiesen hat. Bei Laue betrug die Phasendifferenz zwischen sukzessiven Atomen längs der Koordinatenachsen $2\pi h_1$, $2\pi h_2$, $2\pi h_3$. Dem entsprechend lautete die Bedingung für das Auftreten von Interferenzmaximis, daß h_1, h_2, h_3 ganze Zahlen sein müssen. Bei Bragg kommen zu den acht Atomen in den Ecken des Elementarwürfels noch sechs in den Mitten der Seitenflächen; infolgedessen kommt zu der Bedingung der Ganzzahligkeit der h,

Fig. 9.

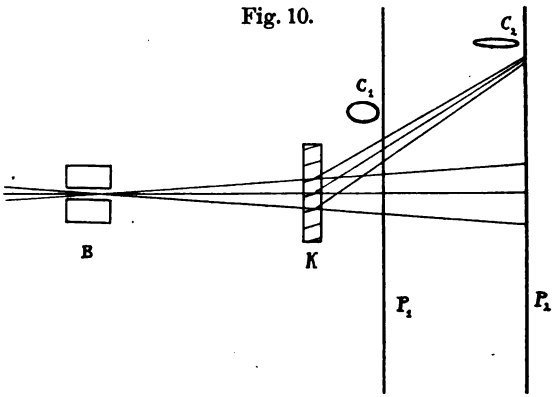


wenn auch die sechs neuen Atome in Phase sein sollen, noch die weitere hinzu, daß auch $\frac{h_1}{2} - \frac{h_3}{2}$ und $\frac{h_2}{2} - \frac{h_3}{2}$ ganze Zahlen sind (die z-Achse als Richtung des einfallenden Strahles gedacht), d. h. h_1, h_2, h_3 müssen entweder sämtlich gerade oder sämtlich ungerade sein. Die Werte h sind in der oben mitgeteilten Tabelle ebenfalls aufgeführt. Eine gewisse Verschiedenheit in der Auffassung besteht zwischen Laue und Bragg auch bezüglich der Erklärung der länglichen Fleckenform. Bragg schließt folgendermaßen: Das auf den Kristall fallende Strahlenbündel ist nie ganz parallel, sondern stets etwas divergent. Die Folge davon ist, daß (vgl Fig. 10) von den Strahlen, deren Einfallsebene durch die Achse des Strahlenkegels geht, keine zwei unter demselben

Digitized by Google

Inzidenzwinkel auf die parallelen Kristallschichten treffen; die Strahlen müssen daher nach der Reflexion konvergieren. Umgekehrt werden die in einer hierzu senkrechten Ebene reflektierten Strahlen nach der Spiegelung noch mehr divergieren. In dieser Weise entsteht auf der photographischen Platte eine kleine Ellipse,

Fig. 10.



B Bleiblende. *K* Kristall. $P_1 P_2$ Photogr. Platten.
$C_1 C_2$ Form des Durchstoßpunktes des Strahlenbündels bei P_1 und P_2.

deren große Achse senkrecht zur Achse des Strahlenbündels und parallel zu den reflektierenden Schichten ist.

c) Die Vereinigung der Laueschen und der Braggschen Theorie durch Wulff und Terada.

Daß in der Tat der Unterschied zwischen der Auffassung von Laue und von Bragg kein wesentlicher ist, hat in eleganter Weise zuerst Wulff[1]) und etwas später Terada[2]) gezeigt. Multipliziert man die Gleichungen (9) mit je einer der Zahlen ξ, η, ζ, die relativ prim sein mögen, und addiert, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &(\xi a_{1x} + \eta a_{2x} + \zeta a_{3x})\alpha + (\xi a_{1y} + \eta a_{2y} + \zeta a_{3y})\beta \\ &+ (\xi a_{1z} + \eta a_{2z} + \zeta a_{3z})\gamma = \lambda(\xi h_1 + \eta h_2 + \zeta h_3) \\ &+ (\xi a_{1x} + \eta a_{2x} + \zeta a_{3x})\alpha_0 + (\xi a_{1y} + \eta a_{2y} + \zeta a_{3y})\beta_0 \\ &+ (\xi a_{1z} + \eta a_{2z} + \zeta a_{3z})\gamma_0 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

oder

$$P_x\alpha + P_y\beta + P_z\gamma = \lambda(\xi h_1 + \eta h_2 + \zeta h_3) + P_x\alpha_0 + P_y\beta_0 + P_z\gamma_0 \quad (19)$$

[1]) G. Wulff, Phys. Zeitschr. **14**, 217—220 (1913).
[2]) T. Terada, Proc. Tokyo, math.-phys. Soc. **7**, 60—70 (1913).

Digitized by Google

wo P die Diagonale des Parallelepipeds mit den Kanten ξa_1, ηa_2, ζa_3 ist. Ist ω der Kosinus des Winkels zwischen dieser Diagonale und dem Interferenzmaximum, ω_0 der Kosinus des Winkels zwischen Diagonale und primärem Strahl, so geht (19) über in die Form

$$P(\omega - \omega_0) = \lambda(\xi h_1 + \eta h_2 + \zeta h_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

d. h. $P\omega = const.$ Es ist also jede Diagonale P oder, was dasselbe ist, jede kristallographisch als Kristallkante mögliche Punktreihe als Achse einer Schar von Kreiskegeln aufzufassen, deren Erzeugende die Richtungen der Interferenzmaxima angeben. Jedem Einzelkegel der Schar entspricht ein bestimmter, durch (20) definierter Gangunterschied. Ist

Fig. 11.

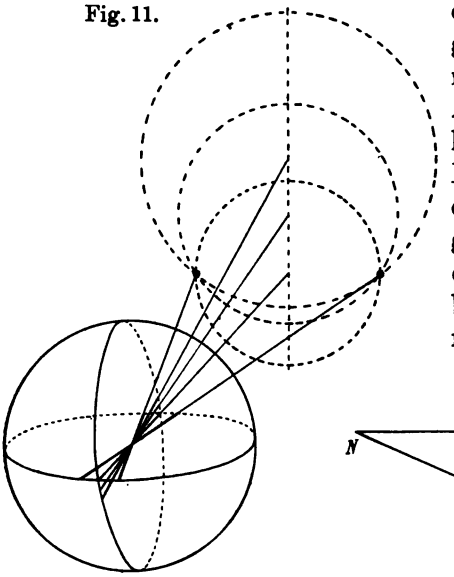
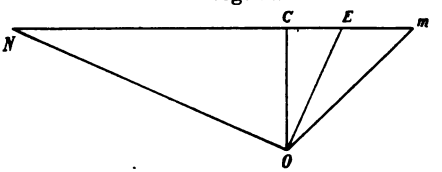


Fig. 12.



der Gangunterschied Null, so erhalten wir die sogenannten „Nullkegel“; ihre Bedingung lautet:

$$\xi h_1 + \eta h_2 + \zeta h_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Sämtliche Nullkegel besitzen eine gemeinsame Erzeugende, den primären Strahl, wie aus $P(\omega - \omega_0) = 0$ folgt. Diejenigen Nullkegel, deren Achsen in einer Ebene (einer möglichen Kristallfläche) liegen, haben außerdem noch eine zweite gemeinsame Erzeugende, nämlich das Spiegelbild des primären Strahles gegen diese Ebene (vgl. Fig. 11). Dieser Erzeugenden entspricht, da sie einer Schar von Kegeln gemeinsam ist, das intensivste Interferenzmaximum, das „Hauptnullmaximum der Netzebene“. Es liegt nun die Annahme nahe, daß in den Photogrammen nur diese intensiven Hauptnullmaxima sichtbar werden. Dann müssen aber die

Digitized by Google

Punkte der Photogramme auf den Schnittkurven der Nullkegel mit der photographischen Platte liegen, d. h. auf Ellipsen angeordnet sein, die durch den Durchstoßpunkt des Primärstrahles gehen. Und diese schon früher aus der Braggschen Theorie gezogene Folgerung trifft in der Tat zu (vgl. Fig. 9). Hiermit ist also gezeigt, daß man, von der Laueschen Theorie ausgehend, ohne jede Hilfshypothese direkt zu der Braggschen Auffassung gelangen kann, wonach die Photogrammpunkte durch Spiegelung des primären Strahles an den kristallographisch möglichen Netzebenen entstehen.

Es ist daher nicht verwunderlich, wenn auch die quantitativen Beziehungen der Theorien in der beide vereinigenden Wulffschen Darstellung zum Ausdruck kommen. Es sei Fig. 12 ein Vertikalschnitt durch eine Netzebene; Nm sei die photographische Platte, OC der Primärstrahl, OE die Netzebene, ON ihre Normale, Om die Richtung des Hauptnullmaximums; die Koordinaten von m seien x, y, z, die von N seien u, v, w. Wir transformieren dieselben so, daß der Abstand der photographischen Platte $OC = 1$ wird, d. h. wir setzen $x' = \frac{x}{z}$, $y' = \frac{y}{z}$, $z' = \frac{z}{z} = 1$; $u' = \frac{u}{w}$, $v' = \frac{v}{w}$, $w' = \frac{w}{w} = 1$. Dann wird, da $\measuredangle COE = \measuredangle EOm$ ist,

$$\frac{Om^2}{1} = \frac{mN^2}{CN^2}; \quad \frac{Om^2 - 1}{1} = \frac{mN^2 - CN^2}{CN^2};$$

$$\text{oder} \quad \frac{x'^2 + y'^2}{1} = \frac{mN^2 - CN^2}{CN^2}.$$

Nun ist

$$CN^2 = u'^2 + v'^2; \; mN^2 = x'^2 + y'^2 + u'^2 + v'^2 + 2\sqrt{(x'^2 + y'^2)(u'^2 + v'^2)};$$

folglich

$$\frac{x'^2 + y'^2}{1} = \frac{x'^2 + y'^2 + 2\sqrt{(x'^2 + y'^2)(u'^2 + v'^2)}}{u'^2 + v'^2};$$

$$u'^2 + v'^2 - 1 = 2\sqrt{\frac{u'^2 + v'^2}{x'^2 + y'^2}};$$

$$u^2 + v^2 - w^2 = 2w\sqrt{\frac{u^2 + v^2}{\frac{x^2 + y^2}{z^2}}}.$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn

$$x : y : z = 2uw : 2vw : (u^2 + v^2 - w^2) \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Digitized by Google

ist. Unter Benutzung von Gl. (14), wo ξ, η, ζ statt x, y, z steht, erhält man hieraus

$$u:v:w = h_1:h_2:h_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Legen wir jetzt einen regulären Kristall der Betrachtung zugrunde, der in Richtung der z-Achse, parallel einer Würfelkante, durchstrahlt werden möge. Es sei das Nullmaximum einer Netzebene h_1, h_2, h_3 und eine außerhalb dieser Ebene liegende Punktreihe ξ, η, ζ gegeben; dann sind die Kanten des oben erwähnten Parallelepipeds $a\xi$, $a\eta$, $a\zeta$, wenn a die Kante des Elementarwürfels ist. Ferner wird

$$P = a\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2};\ w_0 = \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Die Richtungskosinus der Punktreihe sind:

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}},\ \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}},\ \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}},$$

die Richtungskosinus des Nullmaximums, wenn man (22) und (23) berücksichtigt,

$$\frac{2h_1h_3}{h_1^2+h_2^2+h_3^2},\ \frac{2h_2h_3}{h_1^2+h_2^2+h_3^2},\ \frac{h_1^2+h_2^2-h_3^2}{h_1^2+h_2^2+h_3^2}.$$

Hieraus ergibt sich der Kosinus des Winkels zwischen dem Nullmaximum und der Punktreihe:

$$w = \frac{2h_1h_2\xi + 2h_1h_3\eta + (h_1^2+h_2^2-h_3^2)\zeta}{(h_1^2+h_2^2+h_3^2)\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Setzt man die Werte (24) und (25) in (20) ein, so folgt

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{2h_3}{h_1^2+h_2^2+h_3^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

eine Beziehung, die schon früher Laue abgeleitet hatte [vgl. (12)]. Der größte gemeinsame Divisor der h sei m, dann kann (26) in der Form geschrieben werden:

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{2h_3'}{m(h_1'^2+h_2'^2+h_3'^2)} \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{m}\frac{a^3}{a^2\sqrt{\Sigma h'^2}}\cdot\frac{h_3'}{\Sigma h'^2} \quad \ldots \quad (27)$$

wo die h' relativ prim sind. Nun ist $a^2\sqrt{\Sigma h'^2}$ der Flächeninhalt des Elementarparallelogramms der Netzebene h_1, h_2, h_3, demnach der erste Quotient (aus dem Elementarwürfel und dem Elementarparallelogramm) gleich dem Abstand δ benachbarter Nutzebenen; der zweite Quotient ist der Kosinus ε des Winkels zwischen der

Digitized by Google

Normale der Netzebene und dem primären Strahl. Wir erhalten daher statt (27):

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\delta\varepsilon}{m} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (28)$$

$\delta\varepsilon$ ist die Projektion von δ auf den Primärstrahl. Es besteht also jedes Nullmaximum aus einer harmonischen Reihe von Wellen, deren Halbwerte gleich sind der Projektion des Abstandes paralleler Molekülschichten auf die Richtung des Primärstrahles. Diese Schichten sind parallel zu der Netzebene, zu welcher das Nullmaximum gehört. Zu ähnlichen Überlegungen wird auf Grund von Versuchen Terada geführt. Ihm ist es zuerst gelungen, die Interferenz der Röntgenstrahlen nicht nur photographisch nachzuweisen, sondern auch direkt auf dem Phosphoreszenzschirm sichtbar zu machen.

3. Die „Reflexion" der Röntgenstrahlen und die Interferenzen an parallelen Kristallschichten.

Wir haben oben gesehen, daß man die Kristallgitterinterferenz der Röntgenstrahlen formell mit einer Reflexion an den Netzebenen des Kristalls identifizieren kann. Man sollte daher annehmen, daß, wenn man ein Spaltstück eines Kristalls mit seiner eine Netzebene darstellenden Spaltfläche schräg in den Strahlengang eines Röntgenstrahlbündels stellt, eine Art Reflexion auftreten müßte. Von dieser Überlegung ausgehend, hat W. L. Bragg[1]) derartige Versuche mit Glimmer angestellt und in der Tat seine Erwartungen bestätigt gefunden. Später wurden analoge Resultate auch mit anderen Kristallen erzielt (Steinsalz, Gips, Quarz usw.). Bei genügend langer Exposition treten auf den photographischen Platten außer dem an der Spaltfläche bzw. den dazu parallelen Atomebenen entstandenen Reflexionsbild auch die Flecken auf, welche durch Spiegelung an anders orientierten Netzebenen im Inneren des Kristalls zustande kommen.

Eine interessante Tatsache ist dabei festgestellt worden[2]): Ein schmales Röntgenstrahlbündel wurde unter einem Inzidenzwinkel von etwa 80° gegen eine Quarzfläche gerichtet, die mit der

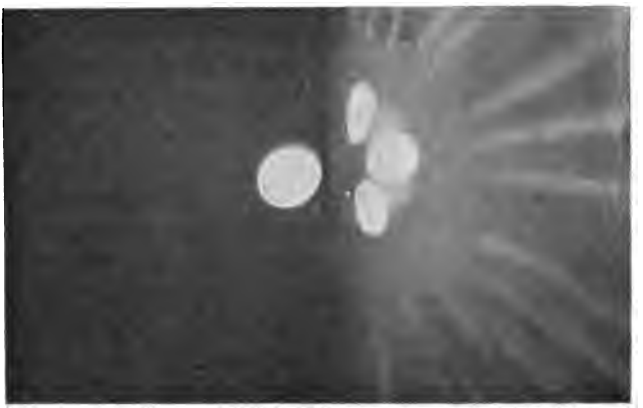
[1]) W. L. Bragg, Nature **90**, 410 (1912).

[2]) E. Hupka, Nature **91**, 267 (1913); Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 369—372 (1913).

Digitized by Google

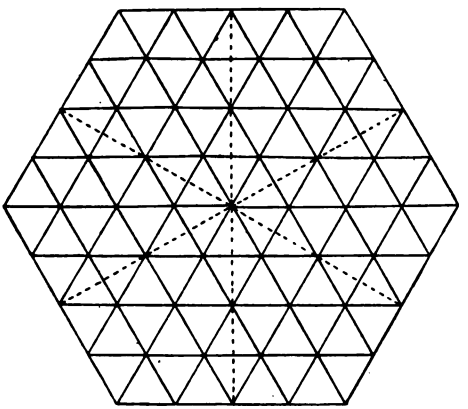
optischen Achse (die optische Achse fiel in die Einfallsebene) einen sehr kleinen Winkel (1 Minute) bildete. Die Oberfläche war mattiert, also für optisches Licht diffus; a fortiori wird man dies für Röntgenstrahlen annehmen dürfen. Trotzdem ergab

Fig. 13.



sich eine deutliche regelmäßige Reflexion, wie Fig. 13 zeigt (ähnliche Resultate wurden mit einem aufgerauhten Glimmer-

Fig. 14.



spaltstück erhalten). Man wird darum sagen können, daß eine regelmäßige Reflexion unabhängig von der Beschaffenheit der geometrischen Oberfläche stattfindet. Außerdem aber zeigt das Photogramm, daß die verschiedenen Strahlen angehörenden Bilder

Digitized by Google

verschiedene Intensität besitzen. Wir wollen versuchen, uns dies an Hand der Fig. 14 zu erklären, welche einen Schnitt senkrecht zur Haupt-(optischen)Achse eines hexagonalen Kristalls darstellen soll. Die Schnittpunkte der ausgezogenen Linien untereinander mögen die Lagen der Moleküle veranschaulichen. Wir können uns nun denken, daß die drei intensiveren reflektierten Strahlen von Molekülschichten zurückgeworfen werden, die parallel zu den ausgezogenen Geraden liegen, die schwächeren dagegen von Schichten, die parallel zu den punktierten Geraden verlaufen. Man sieht leicht, daß in den zuerst genannten Richtungen die Moleküle dichter gelagert sind als in den punktierten Richtungen. Wenn der Vorgang sich in der geschilderten Weise abspielt, so wird man sagen können: die Reflexion ist, gleiche Inzidenzwinkel vorausgesetzt, um so intensiver, je dichter die Moleküle in den reflektierenden Schichten gelagert sind. Dieser Satz ist keineswegs selbstverständlich. Denn die mit Molekülen dichter besetzten Schichten besitzen andererseits einen größeren Abstand voneinander als die weniger Moleküle enthaltenden Schichten. Die in der Volumeneinheit befindliche Molekülzahl ist konstant, gleichgültig, ob man das Volumenelement über der einen oder über der anderen Art von Schichten aufbaut. Da nun die Röntgenstrahlen auch in die Tiefen des Kristalls eindringen, so sollte man meinen, daß es für die Intensität nur auf die Anzahl der dabei getroffenen Moleküle ankommt. Diese Anzahl wäre lediglich durch die Volumendichte der Moleküle bedingt; es müßte also die Intensität aller unter gleichem Winkel an verschiedenen Netzebenen reflektierten Strahlen gleich sein. Wir haben oben gesehen, daß dies nicht der Fall ist. Tamaru hat versucht, eine Erklärung dieses Resultats zu geben: Da das einfallende Strahlenbündel divergent ist, so erreichen die an den hintereinanderliegenden Schichten (nehmen wir an, es seien deren m) reflektierten Strahlen die photographische Platte nicht gleichzeitig; die Einzeleffekte addieren sich. Dagegen treffen die an einer einzigen Ebene reflektierten Strahlen gleichzeitig auf, und zwar ist die Amplitude der einfallenden Welle proportional der in dieser Ebene enthaltenen Molekülzahl n, die Intensität also proportional n^2. Wenn nun die m hintereinanderliegenden Schichten zusammenwirken, so wird die Intensität proportional mn^2. Nun ist mn proportional der Molekülzahl in der Volumeneinheit, also

Digitized by Google

konstant. Demnach ist die Intensität um so größer, je größer n, d. h. je größer die Moleküldichte innerhalb einer Schicht ist. Und dies stimmt mit dem experimentellen Befund überein. Noch etwas anderes zeigt uns die Quarzaufnahme: Die eben besprochenen Reflexionsbilder liegen mit dem Durchstoßpunkt des direkten Strahls auf einer Ellipse (Nullellipse); die Bilder selbst sind die Nullmaxima von Wulff. Von diesen Nullmaximis breiten sich nun schwache, streifenförmige Gebilde strahlenartig aus. Wir erinnern uns der Gleichung (20)

$$P(\omega - \omega_0) = \lambda(\xi h_1 + \eta h_2 + \zeta h_3).$$

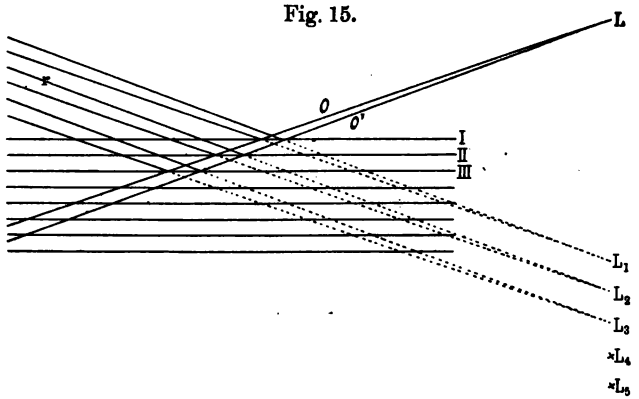
Die Bedingung für die Nullmaxima lautete $\xi h_1 + \eta h_2 + \zeta h_3 = 0$. Es ist nun nicht unmöglich, daß die auf dem Quarzphotogramm sichtbaren Streifen die Maxima höherer Ordnungen sind, für welche $\xi h_1 + \eta h_2 + \zeta h_3 = N$ ist, wo N eine ganze Zahl bedeutet. Ein ähnliches, wenn auch nicht so klares Photogramm wurde mit Steinsalz erhalten. Rein äußerlich betrachtet haben die Strahlengebilde eine gewisse Ähnlichkeit mit einem ebenen Kreuzgitterspektrum.

Mitunter sind die Reflexionsbilder nicht homogen geschwärzt, sondern von einer Reihe von Streifen durchzogen. Man kann im allgemeinen zwei Arten von Streifen unterscheiden. Die eine besteht aus einer relativ geringen Anzahl meist breiter verwaschener Bänder, die andere (sie tritt besonders bei scharfem Antikathodenbrennfleck auf), aus einer Reihe äquidistanter, haarscharfer Linien, die aus dem dunklen Hintergrund hervortreten wie die Linien eines Spektrums. Die wahre Ursache der Erscheinungen ist mit Sicherheit noch nicht festgestellt worden. Indessen geht man mit der Annahme wohl nicht fehl, daß die Streifen der ersten Art auf Strukturstörungen im Kristall zurückzuführen sind. Auf eine größere Anzahl äquidistanter Molekülschichten folgt plötzlich (vielleicht durch geologische Einflüsse oder durch Wachstumserscheinungen bedingt) ein größerer Sprung; die Schichten setzen sich hinter diesem Sprung wieder ungestört fort, wenn auch manchmal mit einer gewissen Neigung gegen das erste System. Die Folge davon ist, daß z. B. eine Kristallfläche, die von solchen (mitunter auch mikroskopisch nicht nachweisbaren) Sprüngen durchzogen ist, eine facettenartige Struktur besitzt; trifft ein Strahl auf eine solche Facette auf, so erzeugt

Digitized by Google

jede Ebene derselben ein besonderes Bild, und man erhält auf diese Weise eine Anzahl nebeneinanderliegender, durch helle Zwischenräume getrennter Bänder. Man kann diese Bänder, da sie Strukturstörungen (Teilungsfehlern des natürlichen Kristallgitters) ihre Entstehung verdanken, in eine gewisse Analogie zu den „Geistern" der optischen Gitter setzen, die auch durch Teilungsfehler verursacht werden. Die zweite Streifenart sah man anfänglich für ein Interferenzphänomen an[1]). Obwohl diese Hypothese bisher noch nicht mit Sicherheit widerlegt wurde, ist es doch möglich, daß auch hier Nebenumstände im Spiele sind: Die Kristallschichten sollen nach der Theorie eben sein, sie sind aber mitunter infolge geologischer Einflüsse leicht gewellt oder narbig (ein typisches Beispiel liefert der Glimmer). Die Folge davon

Fig. 15.



ist, daß sie wie wellige Spiegel wirken, d. h. Linienbilder geben, die auf der Reflexionsebene senkrecht stehen.

Wenn nach dem eben Gesagten auch bezweifelt werden kann, ob die auf photographischem Wege gefundenen Streifungen im Reflexionsbild der Röntgenstrahlen auf Interferenz beruhen, so wird dennoch von der Theorie das Auftreten eines solchen Interferenzphänomens bei der Reflexion gefordert[2]). Denn nehmen wir in Fig. 15 an, L sei das punktförmig gedachte Emissionszentrum

[1]) E. Hupka und W. Steinhaus, Nature **91**, 10 (1913); Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 162—163 (1913); vgl. auch E. Hupka, Phys. Zeitschr. **14**, 995—996 (1913).

[2]) E. Hupka und W. Steinhaus, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 164—166 (1913).

Digitized by Google

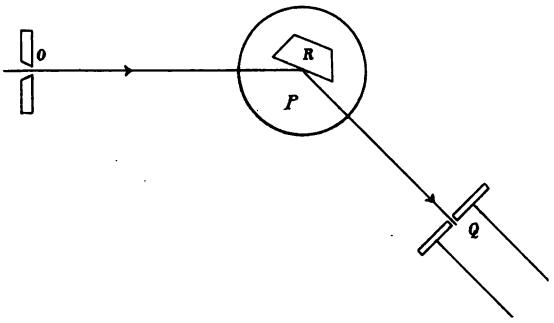
der Strahlen in der Antikathode. Greifen wir durch eine Blende ein schmales divergentes Bündel $LOLO'$ heraus und lassen es auf eine Kristallplatte fallen, so wird dasselbe von der obersten Schicht I so reflektiert, daß die reflektierten Strahlen von dem virtuellen Bilde L_1 zu kommen scheinen. Ist a der senkrechte Abstand des Punktes L von der Oberfläche I, so hat L_1 den gleichen Abstand a von der Oberfläche I. Durch die Reflexion des Bündels an der Schicht II ergibt sich analog ein virtuelles Bild L_2 im Abstande $a + d$ von II, oder $a + 2d$ von I, wobei d der Abstand der Schichten I und II ist, d. h. der Abstand zweier Molekeln in der Richtung senkrecht zur Oberfläche des Kristalls. Durch Reflexion an der Fläche III erhält man ein virtuelles Bild L_3 im Abstande $a + 4d$ von I usw. Man ersieht daraus, daß die einzelnen virtuellen Bilder, von denen die an den verschiedenen Schichten reflektierten Strahlen herzukommen scheinen, auf einer Geraden senkrecht zu den Kristallschichten liegen und voneinander doppelten Molekülabstand haben. Man kann also die Bilder L_1, L_2, L_3... auffassen als eine Reihe kohärenter Lichtpunkte, die in gleicher Phase schwingen und voneinander den gleichen Abstand $2d$ haben. Unter dieser Annahme wird man erwarten, daß in dem Gebiet r Interferenzen zustande kommen, die sich durch ein System von Maximis mit konstantem Winkelabstand kennzeichnen.

Wir hatten früher für eine homogene Strahlung der Wellenlänge λ, welche unter dem Einfallswinkel θ an einem System paralleler Schichten vom konstanten Abstand d reflektiert wird, die Beziehung abgeleitet $\lambda = 2d \cos\theta$. Diese Gleichung stellt die Interferenzbedingung dar für die Reflexion an planparallelen Platten vom Brechungsexponenten 1. Wir werden daher für einen bestimmten Wert von $\cos\theta\,(\theta = \theta_0)$ ein Maximum erhalten; verdoppeln wir $\cos\theta_0$, so erhalten wir das nächste Maximum usw. Wenn wir also homogene Röntgenstrahlen der Wellenlänge λ, von streifender Inzidenz $(\theta = 0)$ angefangen, unter immer spitzeren Einfallswinkeln an einem System paralleler Molekülschichten vom Abstand d reflektieren lassen, so werden wir eine Reihe von Maximis in Richtung des reflektierten Strahls erhalten; für die Inzidenzwinkel θ_0, θ_1, θ_2... gilt dann die Beziehung $\cos\theta_1 = 2\cos\theta_0$, $\cos\theta_2 = 3\cos\theta_0$ usw. Diese Überlegungen, welche zuerst von W. H. und W. L. Bragg angestellt wurden, sind von den ge-

Digitized by Google

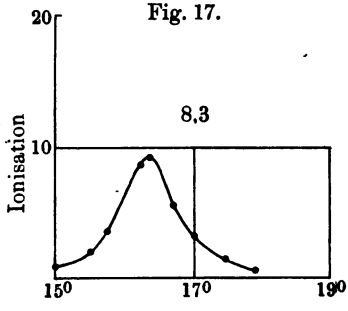
nannten Autoren[1]) und später von Moseley und Darwin[2]) bestätigt worden. Die dabei angewandte Methode benutzte das Ionisationsvermögen der Röntgenstrahlen. Ein Apparat (Fig. 16), der äußerlich einem Spektrometer glich, trug statt des Fernrohrs eine Ionisationskammer Q, die Stellung des Kollimators vertrat ein Bleizylinder, in dessen Höhlung Bleispalte O von verschiedener Weite paßten. Auf dem Prismentisch P stand der Kristall R.

Fig. 16.



Die Ionisationskammer konnte um die Achse des Instruments und um ihre eigene Achse gedreht werden; sie war zur Erhöhung der Ionisation meistens mit Schwefeldioxyd gefüllt. Die bei den Messungen benutzte Strahlung war sehr weich (man sah oft die leuchtende Bahn des Kathodenstrahls).

Fig. 17.



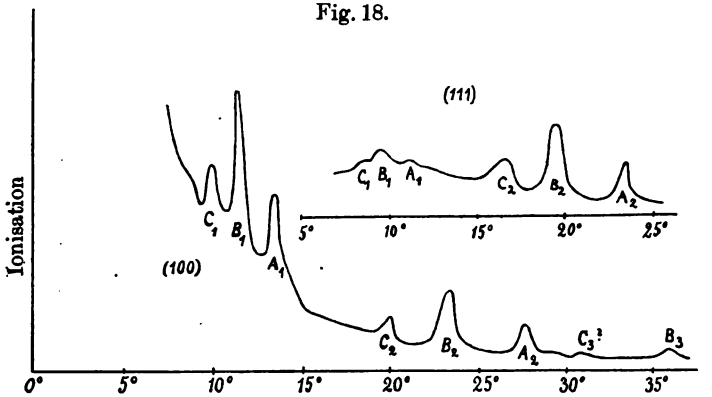
Verfolgen wir nun den Gang der Messungen: Nehmen wir an, der Kristall sei so orientiert, daß die Achse des Instrumentes durch die Kristallfläche geht; die einfallenden Strahlen mögen mit der letzteren den Winkel θ bilden. Wir suchen dann unter Festhaltung der Kristallstellung den Bezirk, in welchem der regulär reflektierte Strahl zu suchen ist, ab, indem wir die Ionisationskammer schrittweise um die Achse des Apparates drehen und die zugehörigen Ionisationen elektrometrisch messen. Fig. 17 zeigt eine auf diese Weise mit Steinsalz erhaltene Kurve; der ein-

[1]) W. H. und W. L. Bragg, Proc. Roy. Soc. London **88**, 428—438 (1913).
[2]) H. G. J. Moseley und C. G. Darwin, Phil. Mag. (6) **26**, 210—232 (1913).

Digitized by Google

fallende Strahl (0°) bildete mit der Kristallfläche einen Winkel von 8,3°; dementsprechend erhält man ein Reflexionsmaximum bei 16,6° = 2.8,3° (infolge der Unvollkommenheit des Apparates ist die Lage des Maximums nach 16,4° verschoben). Hat man auf diese Weise für eine Reihe von Kristallstellungen die Lage der Maxima ermittelt, so kann man nun ein größeres Bereich mit Kristall und Kammer zugleich bestreichen, indem man immer die Kammer in die vorher bestimmte Lage maximaler Ionisation einstellt. Die Kurven, welche man so für Steinsalz bei einer Reflexion an den Ebenen (100) und (111) erhält, sind in Fig. 18

Fig. 18.



wiedergegeben. Man erkennt leicht eine Reihe charakteristischer Unstetigkeiten in der Intensitätskurve für die verschiedenen Winkel. Die Spitzen *A*, *B*, *C* sind den Kurven aller untersuchten Kristalle gemeinsam, z. B. Zinkblende, Kaliumferrocyanid, Kaliumbichromat, Quarz, Kalkspat u. a. Die Absorptionskoeffizienten der diesen Spitzen entsprechenden Strahlungen sind von der Natur der Kristalle und dem Zustand der Röhre unabhängig. Will man die einzelnen bei den verschiedenen Inzidenzwinkeln aufgenommenen Kurven miteinander vergleichen, so muß man folgendes berücksichtigen: Die allgemeine Reflexion gibt zu Maximis Veranlassung, welche nach Art der Fig. 17 gleichmäßig nach beiden Seiten abfallen; die Lage des Maximums bewegt sich dabei von Einstellung zu Einstellung entsprechend dem Reflexionsgesetz fort. Im Gegensatz hierzu werden die zu den Unstetigkeiten Veranlassung gebenden Strahlen nur unter ganz bestimmten Winkeln

Digitized by Google

reflektiert. Das Resultat ist eine Kurve vom Charakter der Fig. 18. Die Absorptionskoeffizienten der Spitzen A, B und C in Al sind bzw. 25,5 . 23,7 und 10,6. Zweifellos rühren die drei Erhebungen bei allen Kristallen stets von denselben homogenen Strahlen her, deren Charakter nur durch das Antikathodenmaterial bedingt ist. Sie wiederholen sich $A_2 B_2 C_2$ in einigem Abstand von dem ersten Tripel $A_1 B_1 C_1$ und schließlich zeigt sich noch spurenweise eine dritte Wiederholung B_3 der intensivsten Strahlenart. Die den Maximis $B_1 B_2 B_3$ entsprechenden Neigungswinkel ϑ der Strahlen gegen die Kristallfläche sind 11,3°. 23,65° und 36,65°. Die Sinus dieser Winkel verhalten sich wie 0,196 : 0,401 : 0,597, d. h. ungefähr wie 1 : 2 : 3. Der Absorptionskoeffizient sämtlicher B-Spitzen ist derselbe. Die drei Strahlengattungen ABC können nicht erst im Kristall erzeugt werden, da ihre Lage von dessen Natur ganz unabhängig ist; die Einschaltung eines absorbierenden Körpers in den Strahlengang vor oder hinter dem Kristall hat dieselbe Wirkung. Da der Reflexionswinkel jeder der drei Strahlengattungen außerordentlich scharf definiert ist, so müssen sie von Wellenzügen von verhältnismäßig großer Länge gebildet werden. Eine unregelmäßige Folge von Impulsen könnte den beobachteten Effekt nicht hervorrufen. Es ist naheliegend, die Systeme $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ als Spektren erster und zweiter Ordnung anzusehen und mit Hilfe der obigen Formel $\lambda = 2 d \cos\theta$ oder $\lambda = 2 d \sin\vartheta$ ($\vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta$ der Neigungswinkel gegen die Kristallfläche) die Wellenlänge zu berechnen. Die Schwierigkeit beruht darin, den richtigen Wert für d zu finden. Aus Gründen, die weiter unten angegeben werden, muß man annehmen, daß die Atomgruppierung sich in jeder zweiten Schicht wiederholt. Es fragt sich nun, ob d der Abstand zweier benachbarter Atomschichten ist oder ob d den Abstand zweier völlig identischer Schichten bedeutet. Im letzteren Fall ist d doppelt so groß wie im ersteren. Machen wir für den Augenblick keinen Unterschied zwischen den Na- und den Cl-Atomen und nehmen wir a als Kantenlänge des Elementarwürfels an, dann ist sein Volumen a^3. Es sei $N = 6{,}2 \cdot 10^{23}$ die Anzahl der Moleküle im Mol., d. h. bei Steinsalz in 58,5 g, dann sind in 1 g Steinsalz $\frac{6{,}2 \cdot 10^{23}}{58{,}8}$ Moleküle enthalten, also in 1 ccm $\frac{6{,}2 \cdot 10^{23} \cdot 2{,}15}{58{,}5} = 2{,}28 \cdot 10^{22}$ Mole-

Digitized by Google

küle. Die Anzahl der Atome ist doppelt so groß, also $4{,}56 \cdot 10^{22}$. Folglich ist der Abstand benachbarter Atome

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{4{,}56 \cdot 10^{22}}}$$

oder

$$a = 2{,}80 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Dies ist gleichzeitig der Abstand zweier mit Atomen gleichartig besetzten Schichten. Hieraus folgt für die B-Strahlung

$$\lambda = 2\, a \sin \vartheta = 1{,}10 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Nehmen wir umgekehrt für d den Abstand benachbarter Atomebenen, d. h. $d = \frac{a}{2}$, so wird

$$\lambda = 0{,}55 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

In ähnlicher Weise ergab sich für eine Nickelantikathode die Wellenlänge zu $1{,}66 \cdot 10^{-8}$ cm und für Wolfram zu $1{,}25 \cdot 10^{-8}$ cm. Der Absorptionskoeffizient in Al für die B-Strahlung bei Platin 23,7 führt in der von Barkla aufgestellten K-Reihe der charakteristischen Strahlung auf einen Strahler vom Atomgewicht 74 (vgl. Fig. 19), in der L-Reihe auf das Atomgewicht 198. Die Übereinstimmung dieser letzten Zahl mit dem Atomgewicht des Platins 195 ist sehr gut. Die Absorption der Wolframstrahlung ist 33 in der L-Reihe; ihr entspricht in der K-Reihe ein Körper vom Atomgewicht 67. Für Nickel ist das Atomgewicht 59. Die Körper, welche in der K-Reihe die beobachtete Absorption zeigen, haben also die Atomgewichte 59, 67 und 74 (genauer 72,5). Nun ist nach Whiddington[1]) die Geschwindigkeit der durch eine charakteristische Strahlung ausgelösten Elektronen proportional dem Atomgewicht des Strahlungskörpers. Demnach ist die Energie der Elektronen, die das Quadrat der Geschwindigkeit als Faktor enthält, proportional dem Quadrat des Atomgewichtes, also das Plancksche Energiequantum der auslösenden Strahlung proportional dem Quadrat des Atomgewichtes. Und in der Tat haben wir $59^2 : 67^2 : 72{,}5^2 = 100 : 130 : 150$, während die Quanten sich verhalten wie $\frac{1}{1{,}66} : \frac{1}{1{,}25} : \frac{1}{1{,}10} = 100 : 132 : 151$.

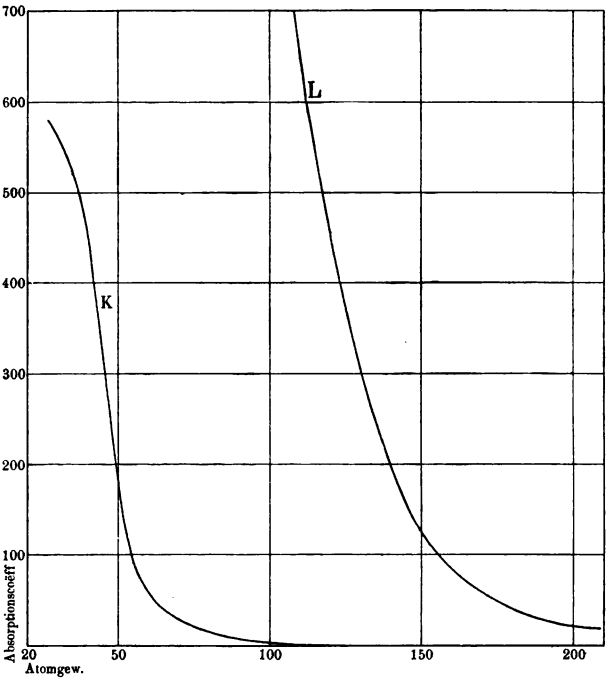
Die von W. H. und W. L. Bragg gemachten Beobachtungen wurden von Moseley und Darwin mit einer verfeinerten Ver-

[1]) R. Whiddington, Proc. Roy. Soc. **86**, 370 (1912).

Digitized by Google

suchsanordnung an Steinsalz, Gips und Ferrocyankalium bestätigt. In Fig. 20 ist A die Antikathode der in einen Bleikasten eingeschlossenen Röntgenröhre. Die Strahlen durchsetzen das Kollimatorrohr eines Spektrometers durch die Bleiblenden P und Q und werden an dem auf dem Spektrometertisch aufgestellten Kristall reflektiert. Das reflektierte Bündel dringt in den Detektor ein. Dieser besteht aus einer luftdichten Metallbüchse, die isoliert an

Fig. 19.

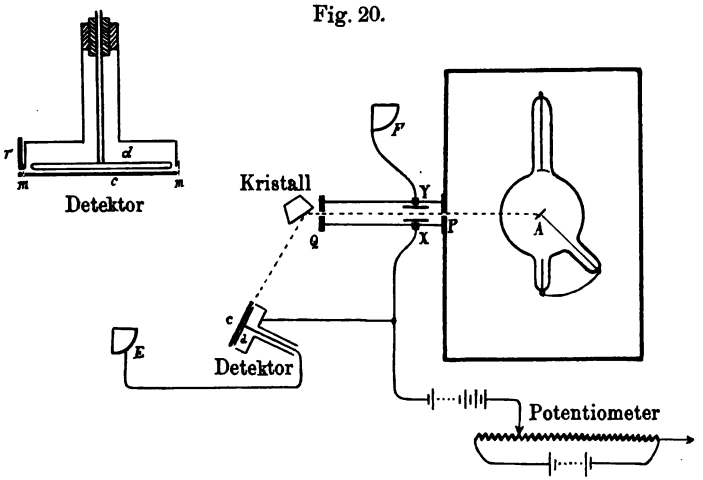


dem Fernrohrarm des Spektrometers befestigt ist. Die Strahlen dringen an der einen Seite durch ein dünnes Glimmerfenster m ein, das von einem Bleischutz r umgeben ist, und fallen fast streifend auf den einen Deckel c der Büchse. Dieser Deckel und eine dazu parallele Platte d bilden den Meßkondensator für die Intensität der einfallenden Strahlung. Der Kondensator XY im Kollimatorrohr diente zur Messung der Intensität (Ionisation) der Primärstrahlen; er war zu diesem Zweck mit einem besonderen Elektrometer F verbunden, während der Detektor am Elektrometer E

Digitized by Google

lag. Zur Erhöhung der Empfindlichkeit wurde mit Stoßionisation gearbeitet; aus demselben Grunde war der Detektor gewöhnlich mit Helium gefüllt; das Feld zwischen c und d wurde so hoch gewählt, daß gerade keine selbständige Entladung eintrat. Die Erhöhung des Ionisationsstromes durch Stoß konnte durch Änderung der Spannung mittels eines Potentiometers beliebig variiert werden. Die Versuche betrafen zunächst die allgemeinen Eigenschaften der reflektierten Strahlung. Wurde der Detektor abwechselnd mit Luft und Helium gefüllt, so war die Volumenionisation in Luft größer als in Helium. Wurde dagegen der Detektor um eine zum einfallenden Strahl senkrechte Achse gedrecht, so daß die Strahlen

Fig. 20.



nunmehr auf eine der Metallplatten cd fielen, so wurde die Ionisation bei Luftfüllung nur wenig, bei Heliumfüllung dagegen erheblich verstärkt; der Effekt war ein Maximum bei fast streifender Inzidenz. Die Abhängigkeit der Ionisation vom Gasdruck (zwischen 10 cm und 1 Atm.) war für den reflektierten Strahl dieselbe wie für den Primärstrahl. Absorptionsversuche mit Aluminium ergaben, daß die primäre und die reflektierte Strahlung aus denselben Bestandteilen zusammengesetzt ist, aber in verschiedener relativer Intensität. Die allgemeine Reflexion am Kristall besitzt in der Nähe der streifenden Inzidenz ein Maximum und fällt mit abnehmendem Inzidenzwinkel ziemlich schnell ab; bei 55° ist die Intensität kaum noch meßbar. Die Form der Intensitätskurve hängt wesentlich vom Härtegrad der Röhre ab; mit zuneh-

Digitized by Google

mender Weichheit der Strahlung sinkt das Maximum zu immer spitzeren Inzidenzwinkeln. Selbst für die günstigsten Winkel ist der Reflexionskoeffizient nur klein (maximal etwa 0,0037); bis zu einem gewissen Grad hängt er vom Charakter der Primärstrahlung ab.

Die Verfasser waren in der Lage, die von Bragg gefundene B- und C-Strahlung in zwei Komponenten aufzulösen. Im übrigen bestätigten und ergänzten sie die Beobachtungen von Bragg. Auffällig war, daß öfter (z. B. beim Kaliumferrocyanid und Steinsalz) die dritte, sechste usw. Reflexion besonders intensiv war. Man kann diese Tatsache durch die Annahme zu erklären suchen, daß die Kristallstruktur sich etwa in jeder dritten Atomschicht wiederholt und daß die dritte, sechste usw. Schicht aus besonders gut reflektierenden (schweren) Atomen gebildet wird.

4. Die Molekularstruktur der Kristalle.

Es ist bereits früher darauf hingewiesen worden, daß die Laueschen Punktdiagramme für Kristalle desselben Systems ähnlich ausfallen, daß aber die einzelnen Flecken eine verschiedene relative Intensität aufweisen. Soeben haben wir nun gesehen, daß die verschiedenen Kristalle auch als Reflektoren für die einzelnen Ordnungen der Reflexion eine verschiedene Wirksamkeit besitzen. Den Herren Bragg[1]) ist es gelungen, aus diesen beiden Tatsachen in höchst geistreicher Weise Schlüsse über die wahrscheinliche molekulare Struktur der Kristalle abzuleiten. Wir wollen im folgenden ihre Gedankengänge an einigen besonders einfachen und schönen Beispielen illustrieren.

Sind a, b, c die Kanten des Elementarparallelepipeds eines beliebigen Kristalles, so sind $x = pa$, $y = qb$, $z = rc$ die Kanten eines beliebigen Parallelepipeds, wenn p, q, r drei beliebige ganze Zahlen sind. Durch die Punkte $x = pa$, $y = z = 0$; $y = qb$, $x = z = 0$ und $z = rc$, $x = y = 0$ wird eine durch den Nullpunkt gehende Atomschicht definiert. Ihr parallel verlaufen in gleichen Abständen voneinander Atomschichten, welche durch die Punkte $x' = m(pa)$, $y' = m(qb)$, $z' = m(rc)$ charakte-

[1]) W. L. Bragg, Proc. Roy. Soc. London **89**, 248—277 (1913); W. H. und W. L. Bragg, Proc. Roy. Soc. London **89**, 277—291 (1913).

Digitized by Google

risiert werden können, wobei m der Reihe nach die Zahlen $1, 2, 3..$ und $-1, -2, -3..$ durchläuft. Das ganze Schichtensystem kann also durch eine Gleichung dargestellt werden von der Form

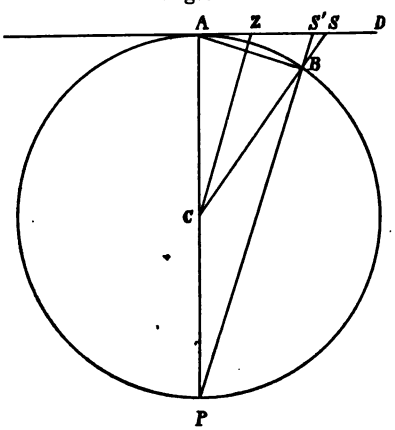
$$\frac{x}{pa} + \frac{y}{qb} + \frac{z}{rc} = g,$$

wo g eine ganze Zahl bedeutet oder auch

$$h\frac{x}{a} + k\frac{y}{b} + l\frac{z}{c} = G,$$

wobei G und h, k, l ebenfalls ganze Zahlen sind und für die h, k, l die Beziehung gilt $h:k:l = \frac{1}{p}:\frac{1}{q}:\frac{1}{r}$. Die Größen h, k, l sind dann die sogenannten Millerschen Indices. Nun verdanken nach der oben mitgeteilten Theorie Braggs die Flecken in den Laueschen Punktdiagrammen ihre Entstehung einer Reflexion an je einem solchen Schichtensystem. Wir können daher jedem Fleck im Punktdiagramm ein Tripel von Millerschen Indices h, k, l zuordnen.

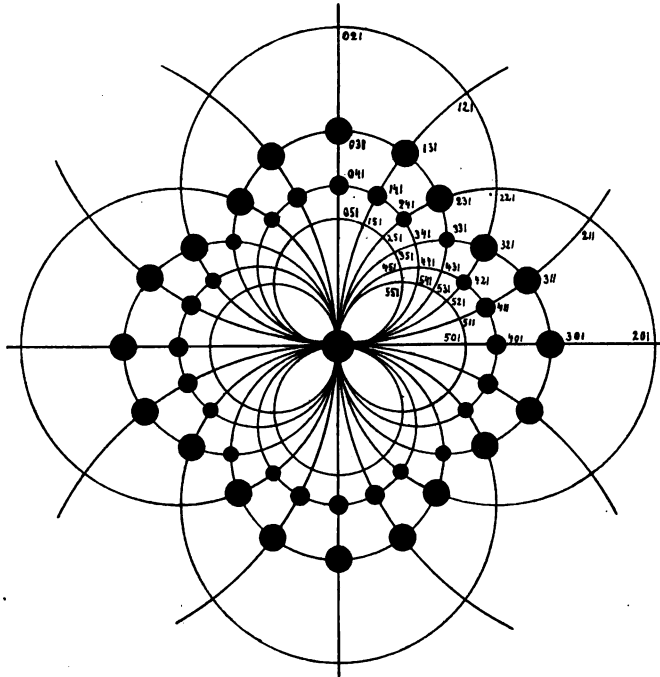
Fig. 21.



Früher haben wir gesehen (vgl. Fig. 8 und 9), daß solche Schichtsysteme, deren Nullebenen durch Drehung um eine gemeinsame Achse (Zonenachse) entstehen, auf der photographischen Platte Punkte erzeugen, die auf Ellipsen angeordnet sind. Diese Ellipsen berühren die x- bzw. y-Achse im Durchstoßpunkt der direkten Strahlen, die reflektierten Strahlen selbst liegen auf der Mantelfläche von Kreiskegeln. Da sich Ellipsen schwer zeichnen lassen, so sollen im folgenden stets Kreise angegeben werden, die man durch eine einfache stereographische Projektion leicht erhält: Es sei (Fig. 21) C, der durchstrahlte Kristall, gleichzeitig Mittelpunkt einer Kugel ABP; der einfallende Strahl PC trifft die photographische Platte AD in A. CZ sei die Zonenachse; dann liegen die reflektierten Strahlen auf dem

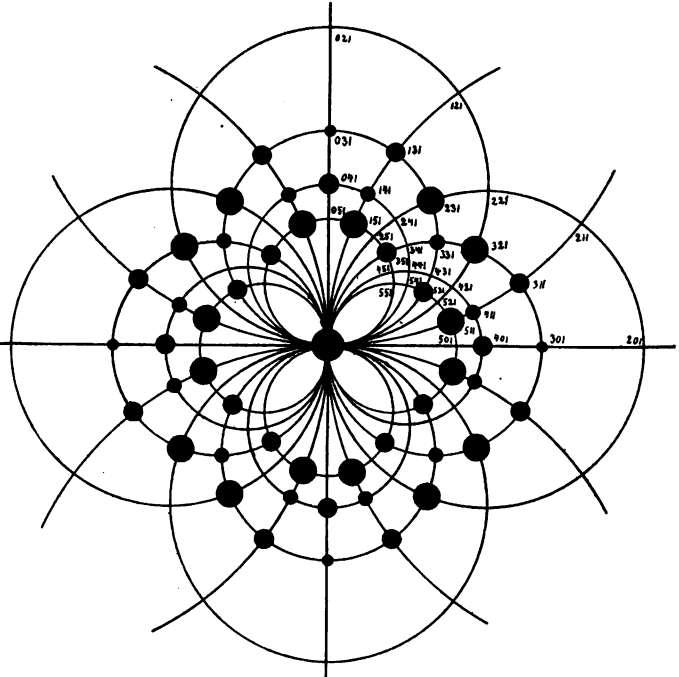
Digitized by Google

Fig. 22.



KCl

Fig. 23.

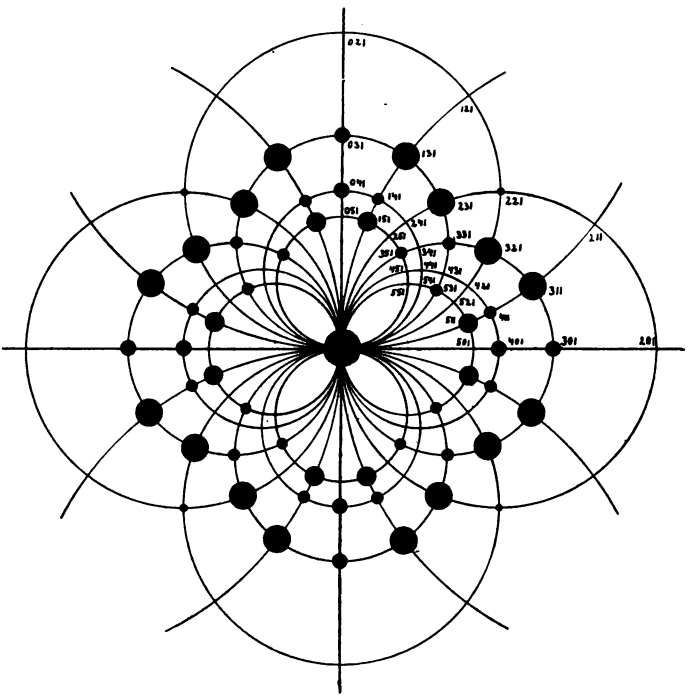


KBr

Digitized by Google

Kreiskegel mit C als Spitze und CZ als Achse; CA und CB sind zwei Erzeugende. Dieser Kegel schneidet aus der Kugel den Kreis mit AB als Durchmesser heraus. Mithin ist die Projektion dieses Kreises von P aus auf die Ebene AD ebenfalls ein Kreis; das Zentrum dieses Kreises ist Z, der Durchmesser AS'. Es wird also die Ellipse AS in den Kreis AS' verwandelt. In

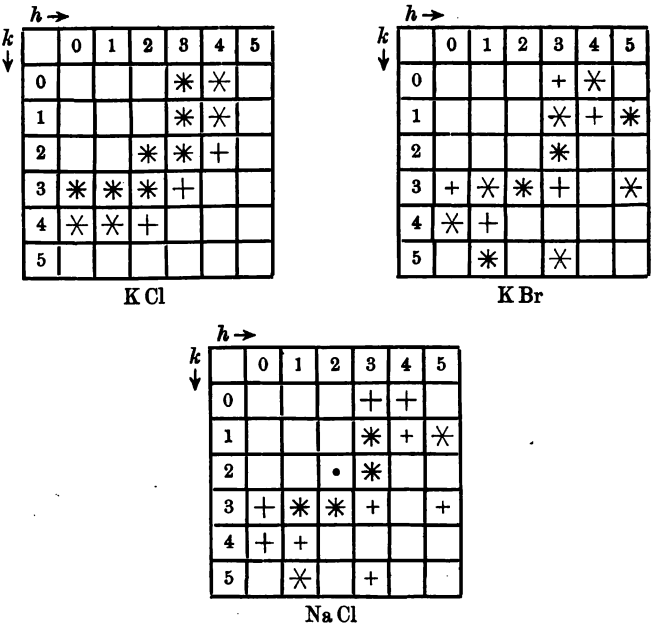
Fig. 24.



Na Cl

dieser Weise sind die folgenden Diagramme für Sylvin, Bromkali und Steinsalz gefunden worden (Fig. 22 bis 24). Den Schnittpunkten der Kreise sind die Millerschen Symbole hkl beigefügt; dabei ist l durchweg gleich 1 gesetzt. Ordnet man die in den Photogrammen auftretenden Flecken nach den Indices hk in ein Schema ein und gibt man die relative Intensität durch die Anzahl der Strahlen eines Sternes wieder, so erhält man folgendes Bild:

Digitized by Google



Es fällt hierbei auf, daß das Schema für KCl einen verhältnismäßig einfachen Charakter besitzt: Sämtliche Kreisschnittpunkte in einer gewissen Entfernung vom Zentrum kommen im Photogramm zum Vorschein; die relative Intensität der Flecken ist für einen bestimmten Abstand nahezu die gleiche. Dem gegenüber weisen die Diagramme für KBr und NaCl eine Anzahl von Lücken auf. Die relative Intensität der Flecken läßt erkennen, daß dem NaCl eine gewisse Mittelstellung zwischen KCl und KBr zukommt. Wir wollen versuchen, uns diese merkwürdigen Tatsachen zu erklären.

Rein qualitativ werden wir erwarten, daß dem KCl eine einfachere atomistische Struktur zukommt als dem NaCl oder BrCl. Und in der Tat lassen sich sämtliche Eigenschaften eines Kristalls, wie die Dichteverteilung im Kristallnetz, der gegenseitige Abstand der Atome usw. durch dasselbe Schema wie beim KCl darstellen, wenn man als Strukturelement einen Würfel mit je einem Atom an den acht Ecken annimmt.

Nach der Theorie verdanken, wie wir früher gesehen haben, die Flecken im Photogramm ihre Entstehung der Reflexion an den

Digitized by Google

Netzebenen im Inneren des Kristalls. Die besonders intensiven Punkte lassen also darauf schließen, daß die in Frage kommenden Netzebenen ein besonders gutes Reflexionsvermögen für die einfallende Strahlung besitzen.

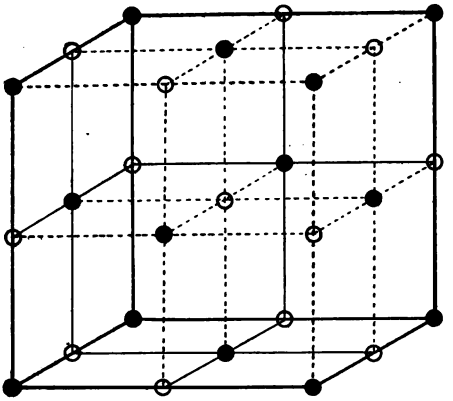
Es erhebt sich nun die Frage, warum homologe Schichten der verschiedenen Alkalihaloidsalze, die einander in physikalischer und chemischer Beziehung so außerordentlich ähnlich sind, sich hinsichtlich ihres Reflexionsvermögens für Röntgenstrahlen so verschieden verhalten. Die Antwort hierauf kann nicht schwer sein, wenn wir bedenken, daß die Wirksamkeit eines Stoffes gegenüber den Röntgenstrahlen eine additive Eigenschaft des Atomgewichtes der Komponenten ist. Es werden also z. B. homologe Schichten zweier verschiedener Kristalle, die wir uns wegen der physikalischen und chemischen Ähnlichkeit vollkommen kongruent mit Atomen besetzt denken, dann verschieden stark reflektieren, wenn in den Schichten des einen Kristalls die Atome gleiches (oder nahezu gleiches) Atomgewicht besitzen, während bei dem anderen Kristall die eine Hälfte der Atome ein erheblich geringeres Atomgewicht hat als die andere.

Kehren wir nun zu dem oben behandelten konkreten Fall des KCl, KBr und NaCl zurück. Wir haben gesehen, daß dem KCl die einfache kubische Struktur mit je einem Atom in den acht Ecken eines Würfels zukommt. An welchen Ecken die K- und an welchen die Cl-Atome liegen, können wir nicht entscheiden. Denn das Atomgewicht des K (39) und das des Chlors (35,5) sind zu wenig voneinander verschieden, um nach dem oben Gesagten ihre Differenzierung mit Hilfe der Röntgenstrahlen aufdecken zu können. Die Lösung dieser Aufgabe ermöglicht uns die Betrachtung des KBr-Schemas. Ein gleiches Schema erhalten wir für ein Punktsystem, welches als Elementargebilde einen Würfel mit je einem Punkt in den acht Würfelecken und je einen Punkt in der Mitte der sechs Würfelflächen besitzt. Da beim KBr das schwere Br-Atom neben dem leichten K-Atom für die Reflexion praktisch allein in Betracht kommt, so werden wir schließen dürfen, daß beim KBr die Br-Atome in den acht Ecken und in den Mitten der sechs Seiten angeordnet sind. Wegen der Kongruenz in der Atomgruppierung beim KCl und KBr werden wir ferner verlangen, daß auch beim KBr wie beim KCl die einzelnen Atome, wenn man von ihrer Gattung absieht, in den

Digitized by Google

Ecken von Würfeln liegen. Eine Konfiguration, die beides leistet, ist folgende: die sämtlichen Atome liegen in den Ecken von Würfeln, die Atome einer Gattung liegen in den Ecken und Mitten der Seiten von Würfeln, vgl. Fig. 25. Die Atome der beiden Gattungen sind durch helle und dunkle Kreise unterschieden. Selbstverständlich besitzt auch das NaCl dieselbe Struktur. Nur wirken hier wegen der geringeren Verschiedenheit im Atomgewicht der Komponenten bei der Reflexion auch noch die leichteren Na-Atome mit. Dies ist auch der Grund, weshalb das Diagramm des NaCl eine Zwischenstellung zwischen denen des KCl und KBr einnimmt. Fig. 25 repräsentiert also das allgemeine Modell eines Alkalihaloidsalzes.

Fig. 25.



Während uns somit das Punktdiagramm einen Einblick in die Struktur gewährt, sind wir nicht imstande, darauf allein einen Vergleich zwischen verschiedenen Kristallen hinsichtlich der Atomabstände und anderer dimensioneller Beziehungen zu stützen. Diese Lücke füllt nun aber die Aufnahme der Reflexionsspektren nach der Ionisationsmethode aus. Nehmen wir z. B. das NaCl, das schon früher behandelt wurde. Die Reflexion erfolgt bekanntlich nach der Beziehung

$$\lambda = 2\,d\,\sin\vartheta,$$

wo ϑ der Neigungswinkel der einfallenden Strahlen gegen die Schichten und d der Abstand derselben ist. Findet die Spiegelung nacheinander an den Flächen (100), (110) und (111) statt, so ist also

$$d_{(100)} : d_{(110)} : d_{(111)} = \frac{1}{\sin\vartheta_{(100)}} : \frac{1}{\sin\vartheta_{(110)}} : \frac{1}{\sin\vartheta_{(111)}}.$$

Experimentell findet man für die drei Winkel 11,4°, 16,0° und 9,8°; daraus folgt:

$$d_{(100)} : d_{(110)} : d_{(111)} = 1 : 0{,}718 : 1{,}16,$$

Digitized by Google

während aus kristallographischen Gründen sein muß

$$d_{(100)} : d_{(110)} ; d_{(111)} = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{2}{\sqrt{3}} = 1 : 0{,}707 : 1{,}15.$$

Die Übereinstimmung ist also durchaus befriedigend.

Es sind also nun sowohl die Struktur als auch die Abstände (ausgedrückt in Einheiten von λ) im Elementarparallelepiped bekannt. Es ist daher ohne weiteres möglich, das Volumen derselben zu berechnen. Das jedem Beugungszentrum zukommende Volumen ist gleich dem reziproken Wert der Zentrenzahl pro Volumeneinheit. Multipliziert man dieses Volumen mit der Dichte des Kristalls, so erhält man die jedem Zentrum zukommende Masse. Aus der Vergleichung dieser Massen für die verschiedenen Kristalle wird man Aufschlüsse darüber erhalten, ob die Beugungszentren aus Atomen, Molekülen oder Molekülkomplexen bestehen. Für eine Reihe von Kristallen ist dieser Vergleich in der folgenden Tabelle durchgeführt. Es bedeutet dabei:

ϑ Neigungswinkel der Strahlen für die Reflexion 1. Ordnung der B-Strahlung.

d Abstand der reflektierenden Schichten.

V Volumen des Elementarparallelepipeds, berechnet mit Hilfe von d unter Zugrundelegung der aus dem Punktdiagramm sich ergebenden Struktur.

ϱ Dichte des Kristalls.

M Molekulargewicht der Substanz.

Kristall	Struktur nach dem Punktdiagramm	Kristallographische Fläche	ϑ Grad	$\frac{d}{\lambda}$	$\frac{V}{\lambda^3}$	ϱ	M	$\frac{V\varrho}{\lambda^3 M}$
Sylvin, K Cl. .	Kubisch	(100)	10,2	2,86	23,4	1,97	74,5	0,605
		(111)	18,0	1,62	22,2			
Steinsalz, Na Cl	Kubisch mit Flächenpunkten	(100)	11,4	2,53	32,5	2,15	58,5	1,22
		(110)	16,0	1,82	33,9			
Zinkblende, ZnS		(111)	9,8	2,95	33,5	4,06	97,0	1,28
Flußspat, CaF_2		(110)	16,5	1,76	30,8	3,18	78,0	1,18
		(100)	11,7	2,46	29,8			
		(111)	10,3	2,79	28,3			
Kalkspat, $CaCO_3$	Hexagonal rhomboedrisch	(100)	10,5	2,74	44,8	2,71	100,0	1,22
		(111)	11,2	2,60				
Eisenkies, FeS_2	Kubisch mit Flächenpunkten	(100)	12,1	2,39	27,3	5,03	120,0	1,15

Digitized by Google

Die letzte Spalte, welche die auf jedes Beugungszentrum kommende Masse, dividiert durch das Molekulargewicht der Substanz, darstellt, ist offenbar proportional der in jedem Zentrum vorhandenen Anzahl von Molekülen. Für alle Kristalle, mit Ausnahme des Sylvins, ist diese Größe innerhalb der Beobachtungsfehler die gleiche. Wenn man die verschiedene Konstitution der einzelnen Kristalle in Betracht zieht, so wird man annehmen können, daß auf jedes Beugungszentrum ein einziges Molekül entfällt, d. h. also, daß im wesentlichen die schweren Ca-, Zn- und Fe-Atome das Gitter bestimmen. Die Ausnahme beim Sylvin rührt dann daher, daß hier zwei nahezu gleich schwere Atome vorhanden sind; folglich kommen auf jedes Molekül zwei Beugungszentren.

Neben dem angularen Abstand der einzelnen Reflexionsmaxima gibt deren relative Intensität noch einen weiteren Aufschluß über den Bau des Kristalls. So z. B. zeigen in Fig. 18 die Reflexionen an Steinsalz deutliche Unterschiede, je nachdem man die Flächen (100) oder (111) benutzt. Während die (100)-Kurve der Intensitätsverteilung eine starke Spitze erster Ordnung und eine schwächere zweiter Ordnung aufweist, liegen die Verhältnisse für die (111)-Fläche gerade umgekehrt. Dieser Unterschied rührt von der Verschiedenheit der betrachteten Flächen her. Im Punktdiagramm (Fig. 25) enthalten die (100)-Flächen eine gleiche Anzahl von weißen und schwarzen Punkten, die (111)-Flächen dagegen abwechselnd alle weißen und alle schwarzen Punkte. Die letzteren bilden für sich ein Gitter mit Flächenpunkten; hierbei sind die (111)-Ebenen voneinander weiter entfernt als die (100)-Ebenen, und zwar im Verhältnis $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Die kleine Spitze erster Ordnung für die Fläche (111) rührt also allein von der Periodizität der schwarzen, die schweren Chloratome enthaltenden Ebenen (111) her. Die dazwischen liegenden (111)-Ebenen mit den leichteren Na-Atomen stören die strenge Periodizität und schwächen daher etwas die Intensität der Reflexion bei der ersten Ordnung.

Ein vorzügliches Beispiel für die Erfolge der eben beschriebenen Methode bietet die Strukturanalyse des Diamanten. Eine (111)-Fläche des Diamanten diente zur Reflexion der Strahlen einer Rhodiumantikathode. Aus Versuchen mit Steinsalz war gefunden worden, daß Rhodium ein Dublet aussendet, dessen eine für das Folgende allein in Frage kommende Wellenlänge

Digitized by Google

$\lambda = 0{,}607 \cdot 10^{-8}$ cm ist. Dieses Dublet tritt auch beim Diamant in den einzelnen Reflexionsspektren auf; merkwürdigerweise fehlt aber das Spektrum zweiter Ordnung. Setzt man in der Gleichung $\lambda = 2 d \sin \vartheta$ für $\lambda = 0{,}607 \cdot 10^{-8}$ und für $\sin \vartheta$ den Wert, der sich aus den Spektren 1., 3., 4. und 5. Ordnung ergibt, d. h. $\sin \vartheta = 0{,}1495$, so wird $d = 2{,}03 \cdot 10^{-8}$ cm.

Wir wollen nun bei der Analyse vom kubischen Gitter und Flächenpunkten ausgehen. Jede Würfelecke gehört zu acht Nachbarwürfeln, also zählen die acht Ecken des Gitterelementes für einen. Ebenso gehört jeder Flächenpunkt zu zwei Nachbarwürfeln, also zählen die sechs Flächenpunkte für drei. Zusammen zählen daher die 14 Punkte des Gitterelementes für vier! Jedem Molekül müssen wir 4 Atome zuschreiben. Es fragt sich nun, ob wir jeden Punkt des Gitterelementes mit einem Atom identifizieren können. Die Frage läßt sich leicht beantworten: Die Dichte des Diamanten ist 3,51 und das Gewicht jedes Atoms 12 mal größer als das des Wasserstoffatoms oder $12 \cdot 1{,}64 \cdot 10^{-24}$. Mithin ist das Volumen des Elementarwürfels

$$\frac{4 \cdot 12 \cdot 1{,}64 \cdot 10^{-24}}{3{,}51} = 22{,}4 \cdot 10^{-24}$$

und die Kantenlänge $2a$

$$\sqrt[3]{22{,}4 \cdot 10^{-24}} = 2{,}82 \cdot 10^{-8};$$

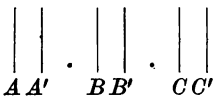
daraus der Abstand aufeinander folgender Ebenen (111):

$$\frac{2a}{\sqrt{3}} = 1{,}63 \cdot 10^{-8},$$

während tatsächlich $2{,}03 \cdot 10^{-8}$ gefunden war. Die beiden Zahlen stehen nahezu im Verhältnis von $1 : \sqrt[3]{2}$. Wir müssen also acht und nicht vier Atome dem Elementarwürfel zuschreiben. Dann erhalten wir nämlich $\frac{2a}{\sqrt{3}} = 2{,}05 \cdot 10^{-8}$ in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund. Der Wert von $2a$ wird dann $2a = 3{,}55 \cdot 10^{-8}$. Wir müssen nun versuchen, die vier weiteren Atome im Gitterelement so unterzubringen, daß wir mit den übrigen Atompunkten nicht in Konflikt kommen. Einen Fingerzeig über den dabei einzuschlagenden Weg gibt uns das Fehlen des Spektrums zweiter Ordnung. Diese Tatsache kann man sich nämlich so erklären, daß außer den Ebenen im Abstand $2{,}03 \cdot 10^{-8}$

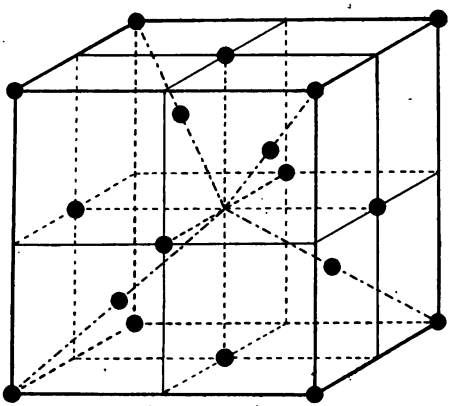
Digitized by Google

noch ein zweites System von Ebenen vorhanden ist, das diesen Abstand im Verhältnis 1:3 teilt, also etwa $AA' = \frac{AB}{3}$. Für das Spektrum



zweiter Ordnung am System ABC gilt dann die Beziehung $2\lambda = 2AB \sin\vartheta$. Nun reflektieren die Ebenen $A'B'C'$ eine ganz ähnliche Strahlung, welche gerade eine halbe Welle Phasenverschiebung besitzt; denn die Phasendifferenz zwischen A und B ist 2λ, zwischen A und A' also $\frac{2\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$. Wir müssen also die vier neuen Atome in Ebenen unterbringen, die parallel zu den Ebenen (111) liegen, und zwar ähnlich wie $A'B'C'$ zu ABC.

Fig. 26.



Diese Bedingung wird erfüllt, wenn wir die vier Atome in die Mitten von vier der acht kleinen Würfel setzen, in welche der Elementarwürfel zerfällt (vgl. Fig. 26). Das Abstandsverhältnis der parallel zu (111) liegenden Ebenen wird dann in der Tat $\frac{a}{2\sqrt{3}} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = 1:3$, wo a die Kantenlänge des kleinen Würfels ist, der Abstand homologer Ebenen $\frac{a}{2\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a}{\sqrt{2}}$, wie früher. Das Modell Fig. 25 zeigt in auffallender Weise die Vierwertigkeit des C-Atoms; denn

Digitized by Google

jedes Atom ist in völlig symmetrischer (tetraedrischer) Weise mit vier Nachbaratomen verbunden. — Auf ähnliche Weise konnten die Strukturen einer ganzen Reihe anderer Kristalle bestimmt werden.

5. Die Beugungserscheinungen an amorphen Körpern.

Wir haben uns bisher ausschließlich auf den Fall beschränkt, wo die beugenden Elemente in bestimmter, gesetzmäßiger Weise angeordnet waren. Dieser Fall lag bei den Kristallen vor. Die einzelnen Atome konnten als Elemente eines räumlichen Kreuzgitters aufgefaßt werden. Die Verhältnisse ließen sich verhältnismäßig leicht überblicken und erlaubten eine einfache mathematische Darstellung. — In der Optik kennen wir neben der Beugung am regelmäßig gebauten Gitter noch die Beugung an Molekülen oder Molekülkomplexen, die nach den Gesetzen der Statistik verteilt sind; ein solcher Fall liegt z. B. bei der Beugung des Lichtes durch trübe Medien vor. Eine ähnliche Erscheinung werden wir auch bei den Röntgenstrahlen erwarten, wenn wir ungeordnete Atomhaufen der Betrachtung unterziehen, d. h. wenn wir nicht Kristalle, sondern amorphe Körper durchstrahlen.

Bevor wir auf diesen allgemeinsten Fall näher eingehen, seien ein paar Bemerkungen über ein gewisses „pseudoamorphes" Zwischenstadium gestattet, über die Durchstrahlung von Metallen. Wir wissen aus der Kristallographie, daß die Metalle nicht durch ihre ganze Masse hindurch amorph, sondern von einer größeren oder kleineren Anzahl von Mikrokristallen durchsetzt sind, die im amorphen Brei ähnlich wie in einer Mutterlauge eingebettet liegen. Ätzt man ein Metall an, so entstehen an der Oberfläche eine Reihe scharf begrenzter Flecken, die Ätzfiguren. Jede dieser Figuren ist ein Zeichen für das Vorhandensein eines Kristallsplitters, eines sogenannten Kornes. In jedem Korn besitzen die einzelnen Mikrokristalle dieselbe Orientierung; in benachbarten Körnern ist die Orientierung im allgemeinen eine andere.

Da nach dem soeben Gesagten die kleinen Kristallsplitter im Metall sich schon auf optischem Wege erkennen lassen, so wird man a fortiori erwarten können, daß ihre Existenz bei der Bestrahlung mit Röntgenstrahlen zutage tritt. Und zwar wird ein bestimmtes Korn ein schmales Strahlenbündel entsprechend seiner Orientierung in ganz bestimmter Richtung reflektieren, ein daneben

Digitized by Google

liegendes Korn in anderer Richtung; die einzelnen Strahlen werden auf der photographischen Platte kleine Flecken erzeugen. Man wird daher als Gesamtbild einen Hof von unregelmäßig verteilten

Fig. 27.

Fig. 28.

Fig. 29.

kleinen Flecken rings um den Durchstoßpunkt der direkten Strahlen erwarten. Derartige mit Platin aufgenommene[1]) Figuren zeigen

[1]) E. Hupka, Phys. Zeitschr. **14**, 623 (1913).

Digitized by Google

Fig. 27 und 28. Ähnliche Erscheinungen erhält man auch mit anderen Metallen (Gold, Nickel, Eisen, Aluminium usw.).

Wird durch den Herstellungsprozeß oder durch Alterung beim unbenutzten Liegen (Agglomeration der nebeneinander liegenden Körner) die Bildung besonders großer Kristallsplitter im Metall begünstigt, so kann der Fall eintreten, daß der einfallende Röntgenstrahl nur ein einziges Kristallindividuum trifft und daher auf der photographischen Platte statt des gemaserten Hofes ein einheitliches Bild von der Struktur des getroffenen Kristalls erzeugt. In Fig. 29 haben wir ein Beispiel für diesen Fall; das benutzte Metall war wiederum Platin. Die Symmetrie der Figur zeigt, daß die einfallenden Strahlen in Richtung einer dreizähligen Symmetrieachse verlaufen, d.h., da Platin regulär kristallisiert, senkrecht zur Oberfläche. Demnach hat man sich die Oberfläche der durchstrahlten Metallpartie aus lauter Oktaederflächen zusammengesetzt zu denken. Es ist, worauf zuerst Knipping[1]) hingewiesen hat, vielleicht möglich, an solchen vollkommen ebenen Metallflächen neue Bestimmungen des Reibungskoeffizienten vorzunehmen.

Wir haben soeben gesehen, daß die mikrokristalline Struktur der Metalle sich photographisch deutlich äußert. Andererseits wissen wir, daß jeder Kristall die auftreffenden Strahlen in gewissem Sinne filtriert oder aussiebt. Ferner ist bekannt, daß die Metalle, insbesondere die schwereren, eine bestimmte selektive Eigenstrahlung beim Auftreffen von Röntgenstrahlen emittieren. — Wenn wir dies alles zusammenfassen, so werden wir annehmen müssen, daß diese charakteristische Strahlung zu einem Teil, wenn nicht gar vollständig, ihren Ursprung dieser Filterwirkung der einzelnen Mikrokristalle verdankt.

Gehen wir nunmehr zu den wirklich amorphen Substanzen über und beginnen wir mit einem optischen Analogon. Blickt man durch eine angehauchte oder mit Lykopodiumsamen bestreute Glasplatte nach einer Lichtquelle, so erscheint ihr Bild auf der Glasplatte hofartig erweitert; außerdem erkennt man ein System farbiger Ringe, welche den hellen Zentralfleck konzentrisch umgeben. Die Ursache dieser Erscheinung ist in der Beugung des Lichtes durch die Wassertröpfchen bzw. Lykopodiumsporen zu suchen: Wir denken uns den direkten Strahl (Visionsradius vom

[1]) P. Knipping, Phys. Zeitschr. **14**, 996—998 (1913).

Digitized by Google

Auge nach dem leuchtenden Punkte) senkrecht auf der Glasplatte stehend; dann ziehen wir durch den Durchstoßpunkt in der Ebene der Platte strahlenartig eine Reihe von geraden Linien. Wir können nun annehmen, daß längs jeder solchen Linie die beugenden Elemente (Tröpfchen, Sporen) im Durchschnitt äquidistant verteilt sind. Wir haben also ein lineares Gitter vor uns und werden daher als Interferenzerscheinung lineare Spektren erhalten, bei denen die Stellen gleichen Gangunterschiedes nach beiden Seiten vom direkten Bilde gleichen Abstand besitzen. Führen wir dieselbe Überlegung für die anderen Lineargitter von anderem Azimut durch, so kommen

Fig. 30.

wir schließlich auf ein System ringartig ausgebreiteter Spektren, wie wir es in der Tat beobachten. Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, daß sich der Abstand der einzelnen Spektren voneinander in bekannter einfacher Weise aus der Gitterkonstante, in diesem Falle dem mittleren Abstande der Wassertröpfchen und Sporen, berechnen läßt.

Während beim optischen Versuch die beugenden Elemente wegen der relativen Größe der in Betracht kommenden Wellenlängen von molarer Größenordnung waren, müssen wir bei den Röntgenstrahlen schon zu den molekularen oder atomistischen Dimensionen hinabsteigen. Die Rolle, welche dort die Wassertröpfchen spielten, müssen hier die Moleküle oder Atome über-

Digitized by Google

nehmen. Eine Komplikation gegenüber der Optik ist dadurch bedingt, daß wir hier bei der Durchstrahlung von praktisch noch so dünnen Schichten ein dreidimensionales Gebilde betrachten müssen, während beim optischen Beispiel die Dicke der Wasserhaut vernachlässigt werden konnte. — Versuche mit Wachs, Kanadabalsam, Paraffin, Paraffinöl, Bernstein usw. sind von Friedrich[1]) ausgeführt worden. Fig. 30 gibt eine der mit Wachs erhaltenen Aufnahmen wieder. Wird ein Teil des durchstrahlten Materials gepreßt, so ändert sich an dieser Stelle der mittlere Abstand der Moleküle; unter Umständen können die mittleren Molekülabstände dicht benachbarter Partien gänzlich verschieden ausfallen. Die Folge davon wird sein, daß das Ringsystem an gewissen Stellen abgesetzt erscheint oder auch ganz unterbrochen ist. Erfahrungen dieser Art hat Friedrich bei seinen Versuchen gemacht.

III. Die Beugung der γ-Strahlen.

Die große Ähnlichkeit, welche zwischen den Eigenschaften der Röntgenstrahlen und denen der γ-Strahlen der radioaktiven Substanzen besteht, legt die Vermutung nahe, daß Erscheinungen der Art, wie wir sie soeben bei Röntgenstrahlen kennen gelernt haben, auch bei γ-Strahlen auftreten werden. Freilich sind hier die experimentellen Schwierigkeiten bedeutend größer als bei den Versuchen mit Röntgenstrahlen. Zunächst ist die photographische Wirksamkeit der γ-Strahlen selbst bei den stärksten Präparaten sehr klein im Verhältnis zu der einer gewöhnlichen Röntgenröhre; bei einer Strahlenquelle von 100 Millicuries Radiumemanation braucht man z. B. eine Exposition von 24 Stunden, um durch „reflektierte“ γ-Strahlen einen deutlichen photographischen Effekt zu erhalten, während bei Röntgenstrahlen unter ähnlichen Bedingungen 10 Minuten genügen würden. Die Hauptschwierigkeit besteht jedoch darin, den störenden Einfluß der primären β-Strahlen zu vermeiden und ebenso die Wirkung der β-Strahlen, welche sekundär überall dort entstehen, wo γ-Strahlen durch die Materie hindurchgehen. Man kann dies nur dadurch erreichen, daß man die ganze Versuchsanordnung (Strahlenquelle, Schirme,

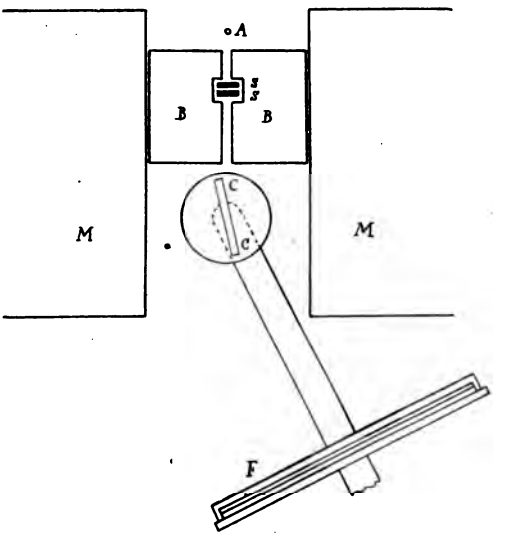
[1]) W. Friedrich, Phys. Zeitschr. **14**, 317—319 (1913).

Digitized by Google

photographische Platte) in ein starkes magnetisches Feld setzt und so die β-Strahlen von der Platte ablenkt.

Rutherford und Andrade[1]) ist es auf diese Weise gelungen, die relativ weiche Strahlung, welche vom Radium B emittiert wird, zu analysieren. Die von ihnen benutzte Versuchsanordnung ist aus Fig. 31 ersichtlich. Hierin bedeutet A ein mit Emanation gefülltes Röhrchen, BB einen massiven Bleiblock mit einem horizontalen Spalt, SS Schirme zum Abblenden der Strahlung, CC ist der auf einem drehbaren Tisch aufgestellte Kristall, F der mit

Fig. 31.



Hilfe eines Armes um die Achse des Tisches drehbare Plattenhalter und MM ein Elektromagnet zur Erzeugung eines Feldes von etwa 2500 Gauß. Die photographische Platte war mit einer schwarzen Maske bedeckt, welche an einer Stelle zur Erzeugung einer Referenzmarke mit einem feinen Spalt versehen war. Auf diese Weise wurde man von zufälligen Lageverschiedenheiten bei den einzelnen Aufnahmen unabhängig. Die benutzten Kristalle waren Steinsalz und Schwerspat. Da die Feinheit des Spaltes in BB nur die Abbildung eines kleinen Winkelbereichs gestattete,

[1]) E. Rutherford und E. N. da C. Andrade, Phil. Mag. (6) **27**, 854—868 (1914).

Digitized by Google

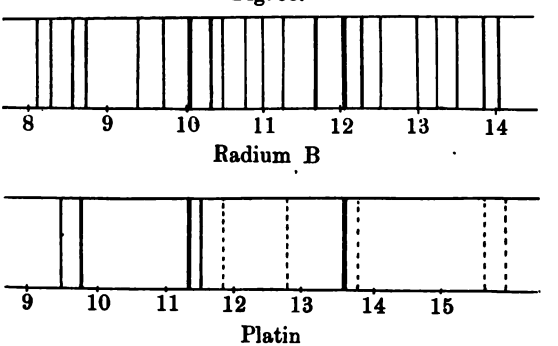
so wurde, um diesen Bereich zu erweitern, der Kristall auf mechanischem Wege während der Aufnahmen langsam gedreht (etwa 1° pro 4 bis 8 Stunden). In den Photogrammen wurden die Abstände der erhaltenen Linien gegen die Referenzmarke gemessen und daraus die Reflexionswinkel berechnet.

Eine Aufnahme, welche die starken von Radium B erzeugten Linien zeigt, gibt Fig. 32 wieder. *B* ist das Bild der

Fig. 32.

direkten Strahlen, *F* die Interferenzmarke, α und β die beiden von der Reflexion der γ-Strahlen herrührenden Linien. Außer diesen besonders starken Linien sind auf den Platten noch eine Reihe schwächerer Linien sichtbar. — Um die Gitterkonstanten

Fig. 33.



der beiden benutzten Kristalle vergleichen zu können, wurden Versuche mit Röntgenstrahlen von einer Ni-Antikathode an NaCl und $BaSO_4$ gemacht. Das Verhältnis entsprechender Winkel ist für die beiden Substanzen 1,278. Multipliziert man die bei $BaSO_4$ gefundenen Winkel mit dieser Zahl, so erhält man fast genau die direkt bei NaCl ermittelten Werte, ein Beweis dafür, daß die

Digitized by Google

gefundenen Linien nicht von zufälligen Unregelmäßigkeiten der Kristalle herrühren. In der folgenden Tabelle sind die Reflexionswinkel und Wellenlängen für die einzelnen Linien wiedergegeben; die Wellenlängen sind aus der Formel $\lambda = 2d \sin \vartheta$ berechnet, wo für $d = 2{,}814 \cdot 10^{-8}$ cm gesetzt ist. Zum Vergleich ist das Platinspektrum daneben gesetzt; die Winkel sind dabei durch 1,122 dividiert, um die starken Linien bei $10^0\,3'$ für Radium B und Platin zur Koinzidenz zu bringen. In Fig. 33 sind die Spektren schematisch dargestellt.

Die Linien besitzen eine merkwürdige Struktur. Die Breite der Linie ist genau dieselbe wie die des Spaltes, die Intensität ist an den beiden Rändern am größten, entsprechend der größeren Aktivität an den Wänden des Röhrchens A infolge des aktiven Niederschlags. Aus der Dimension und der Intensitätsverteilung der Linie folgt daher, daß diese ein genaues Spiegelbild der Strahlenquelle ist.

Radium B Weiches γ-Strahlenspektrum		Platin Röntgenstrahlenspektrum
Reflexionswinkel an Steinsalz	Wellenlänge	Reflexionswinkel / 1,122
$8^0\,6'$	$0{,}793 \cdot 10^{-8}$ cm	
$8^0\,16'$	0,809	
$8^0\,34'$	0,838	$8^0\,27'$
$8^0\,43'$	0,853	$8^0\,43'$
$9^0\,23'$	0,917	
$9^0\,45'$	0,953	
$10^0\,03'$	0,982	$10^0\,02'$
$10^0\,18'$	1,006	$10^0\,13'$
$10^0\,32'$	1,029	
$10^0\,48'$	1,055	
$11^0\,00'$	1,074	
$11^0\,17'$	1,100	
$11^0\,42'$	1,141	
$12^0\,03'$	1,175	$12^0\,03'$
$12^0\,16'$	1,196	
$12^0\,31'$	1,219	
$13^0\,00'$	1,266	
$13^0\,14'$	1,286	
$13^0\,31'$	1,315	
$13^0\,52'$	1,349	
$14^0\,02'$	1,365	

Digitized by Google

UNIV. OF CALIFORNIA

Nach Moseley ist die K-Strahlung aller Elemente zwischen Aluminium und Silber vom selben Typus und ebenso die L-Strahlung der Elemente zwischen Silber und Gold von einem anderen gemeinsamen Typus. Die Frequenz korrespondierender Linien ändert sich beim Übergang von einem Element zum nächsten in gleichmäßigen Schritten, und zwar nimmt die Frequenz der stärksten Linie bei der K-Reihe um $(N-a)^2$, bei der L-Reihe um $(N-b)^2$ zu, wenn man von einem Element zum nächsten übergeht. Dabei sind $a =$ etwa 1 und $b =$ etwa 7,4 Konstante, während N bei jedem Schritt um 1 wächst. Man kann daher annehmen, daß N die Anzahl der positiven Elementarladungen im Atomkern angibt, die sogenannte „Atomzahl". Setzt man die Atomzahlen für Radium B und Platin ein, so ergibt sich als Verhältnis der Winkel korrespondierender Linien die Zahl 1,118, während in der oben mitgeteilten Tabelle der Wert 1,122 lautete.

Nach Soddy und Fajans ändert eine radioaktive Substanz ihre Strahlung im periodischen System, je nachdem sie α- oder β-Strahlen emittiert. Nach der Rutherfordschen Atomtheorie erniedrigt sich bei einer Emission von α-Strahlen die Kernladung um zwei Einheiten, bei der Emission von β-Strahlen wird sie um eine Einheit erhöht. Nun sind nach Soddy Radium B und Blei chemisch nicht zu trennen. Im Sinne der Atomkernhypothese müssen daher die Atome dieser beiden Elemente dieselbe Kernladung besitzen, auch wenn die Atomgewichte etwas verschieden

Element	Strahlung	Atomzahl
Uran I	α	92
Uran X_1	β	90
Uran X_2	β	91
Uran II	α	92
Ionium	α	90
Radium	α	88
Emanation	α	86
Radium A	α	84
Radium B	β	82
Radium C	$\alpha + \beta$	83
Radium D	β	82
Radium E	β	83
Radium F	α	84
Endprodukt (Blei)	...	82

Digitized by Google

sein sollten. Nach dem oben Gesagten müssen wir daher auch für beide Substanzen dieselben Spektren erhalten. Nach Moseley sollte die Atomzahl für Blei 82 sein, die stärkste Linie sollte bei 12,07° von NaCl reflektiert werden. In Übereinstimmung damit steht, daß die stärkste Linie von Radium B bei 12,05° liegt. Es ist also in der Tat die Kernladung von Blei und von Radium B gleich. Setzen wir dafür die Zahl 82 ein, so können wir sofort für die ganze Uranium-Radium-Reihe die Atomzahlen hinschreiben, indem wir von der oben erwähnten Soddy-Fajansschen Hypothese Gebrauch machen.

Digitized by Google

Digitized by Google

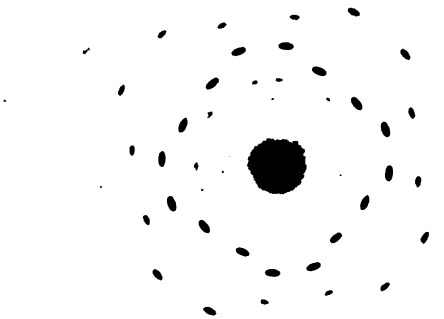


Fig. 1.

Fig. 2.

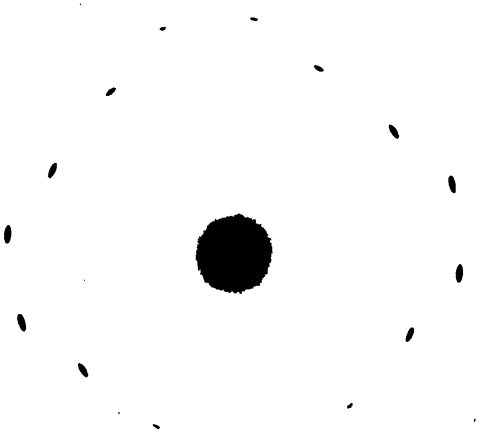


Fig. 3.

Mit Genehmigung der Kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Digitized by Google

Fig. 4.

Fig. 5.

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

Digitized by Google

Digitized by Google

Bisher erschienene Hefte
der
Sammlung Vieweg

Heft 1. Dr. Robert Pohl und Dr. P. Pringsheim-Berlin: *Die lichtelektrischen Erscheinungen.* Mit 36 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 2. Dr. C. Freiherr von Girsewald-Berlin-Halensee: *Peroxyde und Persalze.* M. 2,40.

Heft 3. Diplomingenieur Paul Béjeuhr-Charlottenburg: *Der Blériot-Flugapparat und seine Benutzung durch Pégoud vom Standpunkte des Ingenieurs.* Mit 26 Abbildungen. M. 2,—.

Heft 4. Dr. Stanislaw Loria-Krakau: *Die Lichtbrechung in Gasen als physikalisches und chemisches Problem.* Mit 3 Abbildungen und 1 Tafel. M. 3,—.

Heft 5. Professor Dr. A. Gockel-Freiburg i. d. Schweiz: *Die Radioaktivität von Boden und Quellen.* Mit 10 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 6. Ingenieur D. Sidersky-Paris: *Brennereifragen: Kontinuierliche Gärung der Rübensäfte. — Kontinuierliche Destillation und Rektifikation.* Mit 24 Abbildungen. M. 1,60.

Heft 7. Hofrat Professor Dr. Ed. Donath und Dr. A. Gröger-Brünn: *Die flüssigen Brennstoffe, ihre Bedeutung und Beschaffung.* Mit 1 Abbildung. M. 2,—.

Heft 8. Geh. Reg.-Rat, Professor Dr. Max B. Weinstein-Berlin: *Kräfte und Spannungen. Das Gravitations- und Strahlenfeld.* M. 2,—.

Heft 9/10. Geh. Reg.-Rat, Professor Dr. O. Lummer-Breslau: *Verflüssigung der Kohle und Herstellung der Sonnentemperatur.* Mit 50 Abbildungen. M. 5,—.

Heft 11. Dr. E. Przybyllok: *Polhöhen-Schwankungen.* Mit 8 Abbildungen. M. 1,60.

Heft 12. Professor Dr. Albert Oppel-Halle a. S.: *Gewebekulturen.* Mit 32 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 13. Dr. Wilhelm Foerster-Berlin: *Kalenderwesen und Kalenderreform.* M. 1,60.

Heft 14. Dr. O. Zoth-Graz: *Über die Natur der Mischfarben auf Grund der Undulationshypothese.* Mit 3 Textfiguren und 10 Kurventafeln. M. 2,80.

Digitized by Google

Wenden!

Bisher erschienene Hefte
der
Sammlung Vieweg

ferner:

Heft 15. Dr. Siegfried Valentiner-Clausthal: *Die Grundlagen der Quantentheorie in elementarer Darstellung.* Mit 8 Abbildungen. M. 2,60.

Heft 16. Dr. Siegfried Valentiner-Clausthal: *Anwendung der Quantenhypothese in der kinetischen Theorie der festen Körper und der Gase. In elementarer Darstellung.* Mit 4 Abbildungen. M. 2,60.

Heft 17. Dr. Hans Witte-Wolfenbüttel: *Raum und Zeit im Lichte der neueren Physik.* Mit 17 Abbildungen. M. 2,80.

Heft 18. Dr. Erich Hupka-Tsingtau: *Die Interferenz der Röntgenstrahlen.* Mit 33 Abbildungen und 1 Doppeltafel in Lichtdruck. M. 2,60.

Heft 19. Prof. Dr. Robert Kremann-Graz: *Die elektrolytische Darstellung von Legierungen aus wässerigen Lösungen.* Mit 20 Abbildungen. M. 2,40.

Heft 20. Dr. Erik Liebreich-Berlin: *Rost und Rostschutz.* Mit 22 Abbildungen. M. 3,20.

Digitized by Google

347393
Hupka
QC 481
H8
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google